PT : Correction du TD n° 5 sur le chapitre VI

Application de la réduction des endomorphismes (2)

EXERCICE N° 7 *Racine carrée et commutant d'une matrice diagonalisable*

1. *Un peu de théorie* : Soient f et g des endomorphismes d'un espace E de dimension finie qui commutent, prouver que les sous-espaces propres de f sont stables par g.

On sait que : $g\circ f = f\circ g$. Soit $\lambda\in \mathrm{Sp}(f)$, l'espace propre associé à λ est $\mathrm{E}_\lambda(f)=\mathrm{Ker}\,(f-\lambda id)=\{x\in\mathrm{E}\mid f(x)=\lambda x\}$
On veut : $\mathrm{E}_\lambda(f)$ est stable par $g \Leftrightarrow g\big(\mathrm{E}_\lambda(f)\big)\subset \mathrm{E}_\lambda(f)\Leftrightarrow \forall x\in\mathrm{E}_\lambda(f),\ g(x)\in\mathrm{E}_\lambda(f)\Leftrightarrow \forall x\in \mathrm{E}_\lambda(f), f\big(g(x)\big)=\lambda g(x)$
En effet : Si $x\in\mathrm{E}_\lambda(f)$ alors $f(x)=\lambda x$ puis $f\big(g(x)\big) =_{\text{car } f\circ g=g\circ f} g\big(f(x)\big)=g(\lambda x) =_{\text{car } g \text{ linéaire}} \lambda g(x)$

2. Montrer que $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}11&-5&-5\\-5&3&3\\-5&3&3\end{pmatrix}$ est diagonalisable à valeurs propres simples.

Préciser la matrice de passage P et la matrice D réduite associée.

Pour les 5/2 pour l'instant : A est diagonalisable dans $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ car elle est symétrique
Pour tous : De toute façon, on doit réaliser la diagonalisation concrètement pour trouver P et D donc :
• On détermine le polynôme caractéristique :

$$\chi_\mathrm{A}(x)=\begin{vmatrix}x-11&5&5\\5&x-3&-3\\5&-3&x-3\end{vmatrix}\underset{\mathrm{C}_1\leftarrow \mathrm{C}_1+\mathrm{C}_2+\mathrm{C}_3}{=}\begin{vmatrix}x-1&5&5\\x-1&x-3&-3\\x-1&-3&x-3\end{vmatrix}=(x-1)\begin{vmatrix}1&5&5\\0&x-8&-8\\0&-8&x-8\end{vmatrix}_{\substack{\mathrm{L}_2\leftarrow\mathrm{L}_2-\mathrm{L}_1\\ \mathrm{L}_3\leftarrow \mathrm{L}_3-\mathrm{L}_1}}$$

et, en développant selon la colonne 1 : $\chi_\mathrm{A}(x)=(x-1)\big((x-8)^2-8^2\big)=(x-1)(x-8+8)(x-8-8)=\boxed{x(x-1)(x-16)=\chi_\mathrm{A}(x)}$

Ainsi : χ_A est scindé à racines simples donc $\boxed{\text{A est diagonalisable dans } \mathrm{M}_3(\mathbb{R}) \text{ à valeurs propres simples.}}$ et $\mathrm{Sp(A)}=\{0,1,16\}$

• On obtient une base de diagonalisation en choisissant un vecteur propre pour chacune des valeurs propres puisque chacun des sous-espaces propre est de dimension 1 (valeur propre simple).

Or : $\mathrm{A}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, $\mathrm{A}-\mathrm{I}_3=\begin{pmatrix}10&-5&-5\\-5&2&3\\-5&3&2\end{pmatrix}$ d'où $(\mathrm{A}-\mathrm{I}_3)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ et $\mathrm{A}-16\mathrm{I}_3=\begin{pmatrix}-5&-5&-5\\-5&-13&3\\-5&3&-13\end{pmatrix}$ d'où $(\mathrm{A}-16\mathrm{I}_3)\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$

de sorte que : $\boxed{\mathrm{P}=\begin{pmatrix}0&1&2\\1&1&-1\\-1&1&-1\end{pmatrix} \text{ convient et } \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}=\mathrm{D}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&16\end{pmatrix}}$

3. On recherche les matrices B de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $\mathrm{B}^2=\mathrm{A}$.
On note f et g les endomorphismes canoniquement associés à A et B.

a. Démontrer que f et g commutent On a : $f\circ g=g\circ f\Leftrightarrow \mathrm{AB}=\mathrm{BA}$ or $\mathrm{B}=\mathrm{A}^2$ donc : $\mathrm{AB}=\mathrm{A}^3=\mathrm{BA}$

b. Soit $\mathscr{B}=(e_1,e_2,e_3)$ une base de diagonalisation de A, préciser la forme de la matrice de g dans cette base.

Comme A est diagonalisable à valeurs propres simples : $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Vect}(e_1)\oplus\mathrm{Vect}(e_2)\oplus\mathrm{Vect}(e_3)$ où $\begin{cases}e_1=(0,1,-1)\\e_2=(1,1,1)\\e_3=(2,-1,-1)\end{cases}$ et on cherche $\Delta=\mathrm{Mat}_{(e_1,e_2,e_3)}(g)=\mathrm{Mat}_{e_1,e_2,e_3}\big(g(e_1),g(e_2),g(e_3)\big)$.
On a prouvé $f\circ g=g\circ f$ donc la question 1 assure que les sous-espaces propres de f sont stables par g.
Ici, les sous-espaces propres de f sont les droites vectorielles $\mathrm{Vect}(e_i)$ pour $i\in\{1,2,3\}$ et elles doivent être stable par g autrement dit $\forall x\in\mathrm{Vect}(e_i),\ g(x)\in\mathrm{Vect}(e_i)$ et donc (avec $x=e_i$) : $g(e_i)\in\mathrm{Vect}(e_i)$ soit $g(e_i)=\alpha_i e_i$ où $\alpha_i\in\mathbb{R}$

Ainsi : $\exists(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\in\mathbb{R}^3$, $\begin{cases}g(e_1)=\alpha_1e_1\\g(e_2)=\alpha_2e_2\\g(e_3)=\alpha_3e_3\end{cases}\Rightarrow \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g)=\mathrm{diag}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\Delta$

De plus : $\mathrm{B}^2=\mathrm{A}\Leftrightarrow g\circ g=f\Leftrightarrow \Delta^2=\mathrm{D}\Leftrightarrow \mathrm{diag}(\alpha_1^2,\alpha_2^2,\alpha_3^2)=\mathrm{diag}(0,1,16)\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha_1^2=0\\\alpha_2^2=1\\\alpha_3^2=16\end{cases}$

Aussi : $\Delta=\mathrm{diag}(0,\pm1,\pm4)$ d'où 4 matrices possibles

c. En déduire toutes les matrices B répondant à la question.

$\mathrm{B}=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_{can}}(g)$, $\Delta=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g)$ et P matrice de passage de la base canonique $\mathscr{B}_{can}$ à $\mathscr{B}=(e_1,e_2,e_3)$ donc $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{BP}=\Delta\Leftrightarrow \mathrm{B}=\mathrm{P}\Delta\mathrm{P}^{-1}$ et finalement, il y a 4 matrices possibles : $\mathrm{B}=\mathrm{P}\mathrm{diag}(0,\pm1,\pm4)\mathrm{P}^{-1}$

Un raisonnement similaire avec $\mathrm{A}'=\mathrm{PD}'\mathrm{P}^{-1}$ où $\mathrm{D}'=\mathrm{diag}(0,1,-1)$ aurait conduit à $\gamma^2=-1$ et donc il n'y a pas de matrice B' dans $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ avec $\mathrm{B}'^2=\mathrm{A}'$ mais il y a 4 matrices $\mathrm{P}\mathrm{diag}(0,\pm1,\pm i)\mathrm{P}$ possibles dans $\mathrm{M}_3(\mathbb{C})$

4. Démontrer que l'ensemble des matrices qui commutent avec A est un espace vectoriel de dimension 3.

On cherche désormais les matrices B telles que : AB = BA.
Si g est l'endomorphisme canoniquement associé à B : $\mathrm{AB}=\mathrm{BA}\Leftrightarrow f\circ g=g\circ f$
Le résultat de la question 1) s'applique encore comme dans la question 3 et, dans la base $\mathscr{B}$, l'endomorphisme g a une matrice diagonale $\Delta=\mathrm{diag}(\alpha,\beta,\gamma)=\mathrm{P}^{-1}\mathrm{BP}$. De plus : $f\circ g=g\circ f\Leftrightarrow \mathrm{D}\Delta=\Delta\mathrm{D}$
Or : $\mathrm{D}\Delta=\mathrm{diag}(0,\beta,16\gamma)=\Delta\mathrm{D}$ avec aucune condition supplémentaire sur les scalaires α,β et γ
$\mathrm{AB}=\mathrm{BA}\Leftrightarrow \mathrm{D}\Delta=\Delta\mathrm{D}\Leftrightarrow \Delta\in\Big\{\mathrm{diag}(\alpha,\beta,\gamma)\mid(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3\Big\}=\mathrm{Vect}\Big(\mathrm{E}_{11},\mathrm{E}_{22},\mathrm{E}_{33}\Big)$ où $\Big(\mathrm{E}_{ij}\Big)_{1\leqslant i,j\leqslant 3}$ est la base canonique de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$

$$\Leftrightarrow \mathrm{B}\in\mathrm{Vect}\Big(\mathrm{PE}_{11}\mathrm{P}^{-1},\mathrm{PE}_{22}\mathrm{P}^{-1},\mathrm{PE}_{33}\mathrm{P}^{-1}\Big)$$

On montre facilement que cette famille génératrice est libre :
$\forall(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3,\ \alpha_1\mathrm{PE}_{11}\mathrm{P}^{-1}+\alpha_2\mathrm{PE}_{22}\mathrm{P}^{-1}+\alpha_3\mathrm{PE}_{33}\mathrm{P}^{-1}=0\Leftrightarrow \underbrace{\alpha_1\mathrm{E}_{11}+\alpha_2\mathrm{E}_{22}+\alpha_3\mathrm{E}_{33}}_{=\mathrm{diag}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}=0\Rightarrow\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$
Finalement, c'est une base et l'ensemble des matrices qui commutent avec A (le commutant de A) est de dimension 3

5. On considère désormais $\mathrm{A}_1=\mathrm{PD}_1\mathrm{P}^{-1}$ où D_1 est la matrice diagonale $\mathrm{D}_1=\mathrm{diag}(0,1,1)$.
On cherche les matrices B_1 de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ telle que : $\mathrm{B}_1\mathrm{A}_1=\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1$
On note f_1 et g_1 les endomorphismes associés à A_1 et B_1. On a donc : $f_1\circ g_1=g_1\circ f_1$

a. Justifier que $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{B}_1\mathrm{P}=\begin{pmatrix}m&0&0\\0&a&b\\0&c&d\end{pmatrix}$ où $(m,a,b,c,d)\in\mathbb{R}^5$

Comme f_1 et g_1 commutent, le résultat de 1) s'applique :
les deux sev propres de f_1 sont $\mathrm{E}_0(f_1)=\mathrm{E}_0(\mathrm{A}_1)=\mathrm{Vect}(e_1)$ et $\mathrm{E}_1(f_1)=\mathrm{E}_1(\mathrm{A}_1)=\mathrm{Vect}(e_2,e_3)$ sont stables par g_1
aussi, en raisonnant comme avant : $g_1(e_1)\in\mathrm{Vect}(e_1)\Leftrightarrow g_1(e_1)=me_1$ où $m\in\mathbb{R}$
et $g_1(e_2)$ et $g(e_3)$ sont dans $\mathrm{Vect}(e_2,e_3)$ donc : $g(e_2)=ae_2+ce_3$ et $g(e_3)=be_2+de_3$ avec $(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$

La matrice de g_1 dans $\mathscr{B}$ est donc : $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{B}_1\mathrm{P}=\Delta_1=\begin{pmatrix}m&0&0\\0&a&b\\0&c&d\end{pmatrix}$

De plus : $f_1\circ g_1=g_1\circ f_1\Leftrightarrow \Delta_1\mathrm{D}_1=\mathrm{D}_1\Delta_1\Leftrightarrow\begin{pmatrix}0&0&0\\0&a&b\\0&c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&a&b\\0&c&d\end{pmatrix}$ (toujours vrai sans contrainte sur les scalaires m,a,b,c,d)
Il n'y a donc aucune condition sur les réels a,b,c,d,m

b. En déduire que l'ensemble des matrices qui commutent avec A_1 est un espace vectoriel de dimension 5.

$\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1=\mathrm{B}_1\mathrm{A}_1\Leftrightarrow \mathrm{D}_1\Delta_1=\Delta_1\mathrm{D}_1\Leftrightarrow\Delta_1\in\mathrm{Vect}\Big(\mathrm{E}_{11},\mathrm{E}_{22},\mathrm{E}_{23},\mathrm{E}_{32},\mathrm{E}_{33}\Big)$ où $\Big(\mathrm{E}_{ij}\Big)_{1\leqslant i,j\leqslant3}$ est la base canonique de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$

$$\Leftrightarrow \mathrm{B}_1\in\mathrm{Vect}\Big(\mathrm{PE}_{11}\mathrm{P}^{-1},\mathrm{PE}_{22}\mathrm{P}^{-1},\mathrm{PE}_{23}\mathrm{P}^{-1},\mathrm{PE}_{32}\mathrm{P}^{-1},\mathrm{PE}_{33}\mathrm{P}^{-1}\Big)$$

On montre facilement que la famille génératrice est libre (raisonnement similaire à celui mené à la question 4) donc c'est une base et l'ensemble des matrices qui commutent avec A_1 est un espace vectoriel de dimension 5

La démarche suivie dans les questions 3) et 4) se généralise sans problème pour déterminer les racines carrées et le commutant d'une matrice A d'ordre n diagonalisable à racines simples.
Tant que l'endomorphisme est diagonalisable, on peut adapter le raisonnement en travaillant par bloc associé à la dimension des sous-espace propres suivant la démarche vue en question 5. Le calcul peut toutefois rapidement se compliquer...

EXERCICE N° 8 Soit un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension 3 avec: $\begin{cases} f^2 = f^3 & (i) \\ \dim \operatorname{Ker}(f - id_E) = 1 & (ii) \end{cases}$

1. En utilisant la relation (i), démontrer que les valeurs propres de f valent 0 ou 1

Soit λ une valeur propre de f associée au vecteur propre $x \neq 0$, on a: $f(x) = \lambda x$ Et alors, par linéarité de f:
$f^2(x) = f\big(f(x)\big) = f\big(\lambda x\big) = \lambda f(x) = \lambda \times \lambda x = \lambda^2 x$ puis $f^3(x) = f\big(f^2(x)\big) = f\big(\lambda^2 x\big) = \lambda^2 \times \lambda x = \lambda^3 x$
Or: $f^2(x) = f^3(x) \Leftrightarrow \lambda^2 x = \lambda^3 x \Leftrightarrow (\lambda^3 - \lambda^2)x = 0 \Leftrightarrow_{\text{car } x \neq 0} \lambda^3 - \lambda^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2(\lambda - 1) = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{0,1\}$.
De ce fait: $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(f)$, $\lambda \in \{0,1\}$ autrement dit: $\boxed{\mathrm{Sp}(f) \subset \{0,1\}}$

Attention, pour l'instant, on ne sait pas encore si 0 ou 1 sont des valeurs propres...

Remarque: *De même $f^n(x) = \lambda^n x$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ lorsque x est un vecteur propre de f et, plus généralement: $\mathrm{P}(f)(x) = \mathrm{P}(\lambda)x$ pour tout polynôme P. Ce résultat n'est pas au programme (mais il l'est dans les autres sections)*
Il est pourtant utile car: si P annule f (ie $\mathrm{P}(f) = 0$) alors les valeurs propres de f sont parmi les racines de P

2. Démontrer que f n'est pas bijective.

On sait: f non bijective $\Leftrightarrow_{\text{car } \dim E < +\infty}$ f non injective $\Leftrightarrow \operatorname{Ker} f \neq \{0\} \Leftrightarrow 0 \in \mathrm{Sp}(f)$
Toutefois, on ne sait pas encore que 0 est une valeur propre ! C'est la non bijectivité de f qui va nous permettre de l'obtenir.
Raisonnons par l'absurde, si f est bijective alors f^{-1} existe et on peut composer par f^{-1} alors:
$f^3 = f^2 \Rightarrow f^2 = f \Rightarrow f = id_E \Rightarrow \operatorname{Ker}(f - id_E) = E \Rightarrow \dim \operatorname{Ker}(f - id) = \dim E \Rightarrow_{\text{avec (ii)}} 1 = 3$ C'est Absurde.
Ainsi, $\boxed{f \text{ n'est pas bijective.}}$ et on peut en déduire que $0 \in \mathrm{Sp}(f)$

3. En déduire les valeurs propres de f

La question précédente nous permet de dire que 0 est une valeur propre.
D'après (ii), on sait que 1 est bien valeur propre puisque $\dim \operatorname{Ker}(f - id) = 1 \Rightarrow \operatorname{Ker}(f - id_E) \neq \{0\}$
Ainsi: $\{0,1\} \subset \mathrm{Sp}(f)$ d'où $\boxed{\mathrm{Sp}(f) = \{0,1\}}$ en combinant avec l'inclusion obtenue en 1)

4. Justifier que f^2 est un projecteur

f^2 est un projecteur $\Leftrightarrow f^2 \in \mathscr{L}(E)$ et $f^2 \circ f^2 = f^2$
Or: $f \in \mathscr{L}(E) \Rightarrow f^2 = f \circ f \in \mathscr{L}(E)$ et: $f^2 \circ f^2 = f^4 = f \circ f^3 = f \circ f^2 = f^3 = f^2$. Ainsi, $\boxed{f^2 \text{ est un projecteur de E}}$

5. Montrer que $\operatorname{Ker}(f - id_E) = \operatorname{Ker}(f^2 - id_E)$

On a: $x \in \operatorname{Ker}(f - id) \Leftrightarrow f(x) = x$ et $x \in \operatorname{Ker}(f^2 - id) \Leftrightarrow f^2(x) = x$
Prouvons l'égalité $\boxed{\operatorname{Ker}(f - id_E) = \operatorname{Ker}(f^2 - id_E)}$ par double inclusion:
- Si $x \in \operatorname{Ker}(f - id_E)$ alors $f(x) = x \Rightarrow f^2(x) = f(x) = x \Rightarrow x \in \operatorname{Ker}(f^2 - id_E)$ d'où l'inclusion $\subset$
- Si $x \in \operatorname{Ker}(f^2 - id_E)$ alors

$f^2(x) = x \Rightarrow f^3(x) = f(x)$ mais $f^3 = f^2$ d'où $f(x) = f^3(x) = f^2(x) = x \Rightarrow x \in \operatorname{Ker}(f - id_E)$ d'où $\supset$

6. Préciser alors le polynôme caractéristique de f. *On pourra utiliser la trace*

- D'après 3), $\mathrm{sp}(f) = \{0,1\}$ or χ_f est un polynôme de degré 3 unitaire donc: $\chi_f = \mathrm{X}^p(\mathrm{X}-1)^q$

où on cherche à préciser $p = m(0)$ et $q = m(1)$ les multiplicités de 0 et 1 comme valeur propre de f.
On sait que: $p = m(0) \geqslant 1$, $q = m(1) \geqslant 1$ puisque 0 et 1 sont des valeurs propres et: $p + q = m(0) + m(1) = 3$.
- Le sujet propose d'utiliser la trace de f.

Puisque χ_f est scindé: $\mathrm{tr}(f) = p \times 0 + q \times 1 = q$ (c'est la somme des valeurs propres).
- Par ailleurs, on sait que f^2 est un projecteur donc $E = \operatorname{Ker}(f^2) \oplus \operatorname{Im}(f^2) = \operatorname{Ker}(f^2) \oplus \operatorname{Ker}(f^2 - id)$

Dans une base adaptée à cette décomposition, la matrice de f^2 sera diagonale et la trace correspond au nombre de 1 sur la diagonale càd: $\mathrm{tr}(f^2) = \dim \operatorname{Ker}(f^2 - id) = \dim \operatorname{Ker}(f - id) = 1$ en utilisant 5) et ii)
- Enfin, comme χ_f est scindé, f est trigonalisable donc il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que: $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & ? & ? \\ 0 & 1 & ? \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$

où $\lambda \in \{0,1\}$. Par produit de matrice triangulaire: $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f^2) = \big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\big)^2 = \begin{pmatrix} 0 & ?? & ?? \\ 0 & 1 & ?? \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & ?? & ?? \\ 0 & 1 & ?? \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$

puisque $\lambda^2 = \lambda$ si $\lambda \in \{0,1\}$. Alors: $\mathrm{tr}(f^2) = \mathrm{tr}(f) = q$
- Finalement: $q = \mathrm{tr}(f) = \mathrm{tr}(f^2) = 1$ et, par suite: $p = 3 - q = 2$ et donc: $\boxed{\chi_f = \mathrm{X}^2(\mathrm{X}-1)}$

7. Justifier que $\operatorname{Ker} f^2$ est stable par f.
En déduire qu'il existe une base de E où la matrice de f est de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$

- Il s'agit de vérifier que: $\forall x \in \operatorname{Ker} f^2$, $f(x) \in \operatorname{Ker} f^2$ Or, si $x \in \operatorname{Ker} f^2$ alors $f^2(x) = 0$.

Montrons que $f(x) \in \operatorname{Ker} f^2$: $f^2\big(f(x)\big) = f^3(x) =_{\text{avec (i)}} f^2(x) = 0_E$ soit $\boxed{\operatorname{Ker} f^2 \text{ est stable par } f}$.
- Puisque f^2 est un projecteur: $E = \operatorname{Ker}(f^2 - id_E) \oplus \operatorname{Ker}(f^2) = \operatorname{Ker}(f - id_E) \oplus \operatorname{Ker}(f^2)$ avec la question 5.
- Notons $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base recherchée. Si $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} f(e_1) = e_1 \\ f(e_2) = 0_E \\ f(e_3) = \alpha e_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e_1 \in \operatorname{Ker}(f - id) \\ e_2 \in \operatorname{Ker}(f) \\ f(e_3) = \alpha e_2 \end{cases}$

De plus: $f^2(e_3) = f(\alpha e_2) = \alpha \times 0_E = 0_E \Rightarrow e_3 \in \operatorname{Ker}(f^2) \Rightarrow f(e_3) \in \operatorname{Ker}(f^2)$ puisque $\operatorname{Ker}(f^2)$ est stable par f.
- On choisit e_1 non nul dans $\operatorname{Ker}(f - id_E)$: c'est possible car c'est un espace de dimension 1 d'après (i).

On choisit e_2 non nul dans $\operatorname{Ker} f$: c'est possible car 0 est valeur propre de f donc $\dim \operatorname{Ker} f \geqslant 1$.
Comme $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker}(f^2)$, on peut compléter (e_2) avec e_3 de sorte que (e_2, e_3) est une base de $\operatorname{Ker}(f^2)$ de dimension 2:
En effet: $E = \operatorname{Ker}(f - id_E) \oplus \operatorname{Ker}(f^2) \Rightarrow \dim E = \dim \operatorname{Ker}(f - id) + \dim \operatorname{Ker}(f^2)$
$\Rightarrow 3 = 1 + \dim \operatorname{Ker}(f^2)$
$\Rightarrow \dim \operatorname{Ker}(f^2) = 2$
La famille $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est alors une base de E puisque $\operatorname{Ker}(f - id_E) \oplus \operatorname{Ker}(f^2) = E$.
- Il nous reste à vérifier que $f(e_3) = \alpha e_2$. Comme $e_3 \in \operatorname{Ker}(f^2)$ et $\operatorname{Ker}(f^2)$ est stable par f:

$f(e_3) \in \operatorname{Ker} f^2 = \mathrm{Vect}(e_2, e_3) \Rightarrow \exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,\ f(e_3) = \alpha e_2 + \beta e_3$

Aussi: $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$ mais $\mathrm{tr}(f) = 1 + \beta = 1 + 0 + 0 \Rightarrow \beta = 0$ et $\boxed{\text{l'existence de la base est prouvée.}}$

LEROY - PT Paul Constans