PT : Correction du TD n° 4 sur le chapitre VI

Application de la réduction des endomorphismes

EXEMPLE N° 5 Les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables?

• $\mathrm{tr}(A) = 4 = \mathrm{tr}(B)$, $\det(A) = 4 = \det(B)$ d'où $\chi_A(x) = x^2 - \mathrm{tr}(A)x + \det(A) = \chi_B(x) = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$

$A - 2I_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B - 2I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ sont toutes les deux de rang 1 aussi $\dim E_2(A) = 1 = \dim E_2(B)$ et les deux matrices sont semblables à une matrice $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et donc semblables entre elles.

• Déterminons maintenant la relation de similitude en poursuivant la trigonalisation des matrices A et B :
On note f_A (resp. f_B) l' endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à la matrices A (resp. B) et $\mathscr{B}_A = (u_A, v_A)$ (resp. $\mathscr{B}_B = (u_B, v_B)$) la base trigonalisant la matrice A (resp. B) :

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_A}(f_A) \Leftrightarrow \begin{cases} f_A(u_A) = 2u_A \\ f_A(v_A) = u_A + 2v_A \end{cases} \Leftrightarrow u_A \in E_2(A) \text{ et } f_A(v_A) = u_A + 2v_A$$

Et de même : $u_B \in E_2(B)$ et $f_B(v_B) = u_B + 2v_B$
Les espaces propres sont de dimension 1 donc on cherche un vecteur non nuls de ces sev pour obtenir une base :

$E_2(A) = \mathrm{Ker}\,(A - 2I_2) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Vect}((1,1))$ aussi $u_A = (\alpha, \alpha)$ et $v_A = (x, y)$ vérifiant :

$f_A(v_A) = u_A + v_A \Leftrightarrow A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow -x + y = \alpha$ et aussi $\begin{vmatrix} \alpha & x \\ \alpha & y \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow \alpha(x-y) \neq 0 \Leftrightarrow_{x-y=-\alpha} -\alpha^2 \neq 0$

$E_2(B) = \mathrm{Ker}\,(B - 2I_2) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \mathrm{Vect}((1,-1))$ aussi $u_B = (\beta, -\beta)$ et $v_B = (x', y')$ vérifiant :

$f_B(v_B) = u_B + v_B \Leftrightarrow B\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ -\beta \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Leftrightarrow x' + y' = \beta$ et aussi $\begin{vmatrix} \beta & x' \\ -\beta & y' \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow \beta(x'+y') \neq 0 \Leftrightarrow_{x'+y'=\beta} \beta^2 \neq 0$

Ainsi, par exemple : $\alpha = \beta = 1$ et $x = x' = 0$ conviennent d'où $T = P^{-1}AP = Q^{-1}BQ$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Et on obtient la relation de similitude : $B = \left(PQ^{-1}\right)^{-1} A \left(PQ^{-1}\right)$

EXERCICE N° 6 On considère un système différentiel (S) : $\begin{cases} x' = 5x - 2y - z \\ y' = 2x + y - z \\ z' = x - y + 2z \end{cases}$ où x, y, z sont des fonctions inconnues de la variable réelle t supposées dérivables sur $\mathbb{R}$ qu'on écrit, à l'aide d'une matrice, sous la forme :

$$X' = AX \quad \text{où} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. La matrice A est-elle diagonalisable?

$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ a pour polynôme caractéristique :

$$\chi_A(t) = \begin{vmatrix} t-5 & 2 & 1 \\ -2 & t-1 & 1 \\ -1 & 1 & t-2 \end{vmatrix} =_{C_1 \leftarrow C_1 + C_2} (t-3)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & t-1 & 1 \\ 0 & 1 & t-2 \end{vmatrix} =_{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} (t-3)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & t-3 & 0 \\ 0 & 1 & t-2 \end{vmatrix}$$

Aussi, en développant selon C_1 : $\chi_A(t) = (t-3)\big((t-3)(t-2) - 0\big) = (t-2)(t-3)^2$.
On étudie le sev propre associé à 3 :

$$E_3 = \mathrm{Ker}\,(A - 3I_3) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{rg}(A - 3I_3) \geqslant 2$ (2 colonnes non colinéaires) aussi, par le théorème du rang : $\dim E_3 = \dim(\mathbb{R}^3) - \mathrm{rg}(A - 3I_3) \leqslant 3 - 2 = 1$ donc nécessairement $\neq 2 = m(3)$ la multiplicité de 3. Par ailleurs : $\dim E_3 \geqslant 1$ (car 3 est vp) donc en fait : $\dim E_3 = 1$

La dimension du sev propre associé à 3 n'est pas égale à la multiplicité de 3 : A n'est pas diagonalisable.

2. Montrer que A est semblable à une matrice $T = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 1 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$ avec α et β des réel à préciser.

Préciser la matrice de passage P (il n'est pas nécessaire d'expliciter P^{-1})

Tout d'abord : si A et T sont semblables, elles doivent avoir le même polynôme caractéristique ce qui impose $\alpha = 2$ et $\beta = 3$.

Ensuite, A et T sont semblables si elles représentent le même endomorphisme f dans des bases différentes. Notons $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ avec $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ alors on cherche $\mathscr{B}' = (u, v, w)$ une autre base de $\mathbb{R}^3$ avec

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = T \text{ ce qui induit } \begin{cases} f(u) = 2u \\ f(v) = 3v \\ f(w) = v + 3w \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u \in E_2 = \mathrm{Ker}\,(A - 2I_3) \\ v \in E_3 = \mathrm{Ker}\,(A - 3I_3) \\ Aw = v + 3w \end{cases}$$

On sait que $E_2 = \mathrm{Ker}\,(A - 2I_3)$ est de dimension 1(vp simple) et : $\mathrm{Ker}\,(A - 2I_3) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Vect}\big((1,1,1)\big)$

La somme des trois colonnes est nulle

On pose donc $u = (1,1,1)$ En outre, $E_3(A) = \mathrm{Vect}\big((1,1,0)\big)$ (car de dimension 1 avec $C_1 - C_2 = 0$)
On choisit donc $u = (a, a, a)$ avec $a \neq 0$ et $v = (b, b, 0)$ avec $b \neq 0$ et on cherche $w = (x, y, z)$ avec :

$$Aw = 3\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 2y - z = 3x + b \\ 2x + y - z = 3y + b \\ x - y + 2z = 3z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2y - z = b \\ x - y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x-y) - (x-y) = b \\ z = x - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = b \\ z = b \end{cases}$$

Ainsi : $w = (y + b, y, b)$ et il reste à s'assurer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$:

$$\det(u, v, w) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a & b & y+b \\ a & b & y \\ a & 0 & b \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow_{L_1 \leftarrow L_1 - L_2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & b \\ a & b & y \\ a & 0 & b \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow_{\text{dev selon } L_1} -ab^2 \neq 0$$

Finalement : $u = (a, a, a)$ où $a \neq 0$, $v = (b, b, 0)$ où $b \neq 0$ et $w = (y + b, y, b)$ sans contrainte sur y

Ainsi, par exemple, avec $a = b = 1$ et $y = 0$ alors $\boxed{P = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ alors } P^{-1}AP = T \text{ avec } \alpha = 2 \text{ et } \beta = 3}$

3. Résoudre le système différentiel $Y' = TY$ d'inconnue $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ où a, b, c sont des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$

$$Y' = TY \Leftrightarrow \begin{cases} a' = 2a \\ b' = 3b + c \\ c' = 3c \end{cases} \Leftrightarrow \exists(\alpha, \gamma) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} a(t) = \alpha e^{2t} \\ b' = 3b + \gamma e^{3t} \\ c(t) = \gamma e^{3t} \end{cases}$$

Pour la seconde équation EDL2 qui a un second membre :
- les solutions homogènes ont pour expression : βe^{3t}
- une solution particulière a pour expression kte^{3t} car 3 est racine simple de l'équation caractéristique $r - 3 = 0$:

$$ke^{3t} + 3kte^{3t} = 3kte^{3t} + \gamma e^{3t} \Leftrightarrow k = \gamma \quad \text{Ainsi} : \exists(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3, \forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} a(t) = \alpha e^{2t} \\ b(t) = \beta e^{3t} + \gamma te^{3t} \\ c(t) = \gamma e^{3t} \end{cases}$$

4. En déduire l'ensemble des solutions de (S) en utilisant le changement de bases : $X = PY$.
Puisque P *est une matrice* <u>*à coefficients constants*</u>*, on pourra admettre que* $Y' = (PX)' = PX'$

Si $X = PY$ où P est la matrice de la question 2, on a : $Y' = P^{-1}X' = P^{-1}AX = TY$

d'où, avec la question 3, on a : $X(t) = PY(t)$ soit $\boxed{\exists(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3, \forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x(t) = \alpha e^{2t} + \beta e^{3t} + \gamma te^{3t} + \gamma e^{3t} \\ y(t) = \alpha e^{2t} + \beta e^{3t} + \gamma te^{3t} \\ z(t) = \alpha e^{2t} + \gamma e^{3t} \end{cases}}$

EXEMPLE 6 Déterminer l'expression des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant : $\forall n\in\mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = -4u_n - 6v_n \\ v_{n+1} = 3u_n + 5v_n \end{cases}$ avec $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

<u>Méthode n'utilisant que le cours de PTSI</u>

On cherche une relation de récurrence à l'ordre 2 vérifier par la suite (u_n) en utilisant les relations :

$$(1):\ u_{n+1} = -4u_n - 6v_n \quad \text{et} \quad (2):\ v_{n+1} = 3u_n + 5v_n$$

$$u_{n+2} \underset{(1)}{=} -4u_{n+1} - 6v_{n+1} \underset{(2)}{=} -4u_{n+1} - 6\big(3u_n + 5v_n\big) = -4u_{n+1} - 18u_n + 5\big(-6v_n\big) \underset{(1)}{=} -4u_{n+1} - 18u_n + 5\big(u_{n+1} + 4u_n\big)$$

avec n « = » $n+1$

Autrement dit : $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$ où on reconnaît une relation de récurrence linéaire d'ordre 2

L'équation caractéristique est $r^2 - r - 2 = 0 \Leftrightarrow (r+1)(r-2) = 0$ aussi $u_n = \alpha(-1)^n + \beta 2^n$ où $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ vérifie :

$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = -4u_0 - 6v_0 = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ -\alpha + 2\beta = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -1 \\ \alpha = 2 \end{cases}$ soit $u_n = 2(-1)^n - 2^n$

Puis, avec (1) :

$$v_n = \frac{1}{-6}(u_{n+1} + 4u_n) = -\frac{1}{6}\big(2(-1)^{n+1} - 2^{n+1} + 8(-1)^n - 4\times 2^n\big) = -\frac{1}{6}\big((-2+8)(-1)^n + (-2-4)2^n\big) = -(-1)^n + 2^n$$

<u>Méthode utilisant la réduction des endomorphismes (généralisable)</u>

On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ de sorte que $\begin{cases} u_{n+1} = -4u_n - 6v_n \\ v_{n+1} = 3u_n + 5v_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow X_{n+1} = AX_n$

Par une récurrence simple, on prouve : $X_n = A^n X_0 = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ L'hypothèse de récurrence est « $X_n = A^n X_0$ »

aussi il s'agit de calculer la première colonne de A^n où $A = \begin{pmatrix} -4 & -6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

Pour cela, on réduit A : $\chi_A(x) = (x+4)(x-5) - 6\times -3 = x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$

Puisque χ_A est scindé à racines simples, A est diagonalisable et les deux sev propres sont de dimension 1 donc il suffit de trouver un vecteur non nul de ces sev pour en obtenir une base :

$A + I_2 = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ d'où $(A + I_2)\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $E_{-1}(1) = \mathrm{Vect}(u)$ où $u = (2,-1)$

$A - 2I_2 = \begin{pmatrix} -6 & -6 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ d'où $(A - 2I_2)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $E_2(A) = \mathrm{Vect}(v)$ où $v = (1,-1)$

La famille (u,v) est libre (car vecteurs propres pour des valeurs propres distinctes) : c'est donc une base de diagonalisation de A et : $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C})$ vérifie : $P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Si A est la matrice de $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$ dans la base canonique (e_1,e_2) alors D est la matrice de f dans la base (u,v)

A^n est alors la matrice de f^n dans la base (e_1,e_2) et D^n celle de f^n dans la base (u,v) donc, par changement de bases :

$$P^{-1}D^nP = A^n \Leftrightarrow A^n = PD^nP^{-1}$$

Or : $\begin{cases} u - v = (1,0) = e_1 \\ u - 2v = (0,1) = e_2 \end{cases}$ d'où $P^{-1} = \mathrm{Mat}_{u,v}(e_1,e_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ aussi :

$$A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-1)^n & (-1)^n \\ -2^n & -2^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(-1)^n - 2^n & ? \\ -(-1)^n + 2^n & ? \end{pmatrix}$$

et finalement : $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}, \begin{cases} u_n = 2(-1)^n - 2^n \\ v_n = 2^n - (-1)^n \end{cases}}$

EXERCICE N° 5 Exprimer le terme général des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$\begin{cases} u_0 = -2 \\ v_0 = 0 \\ w_0 = 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall n\in\mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = 3u_n - 3v_n + 2w_n \\ v_{n+1} = -u_n + 5v_n - 2w_n \\ w_{n+1} = -u_n + 3v_n \end{cases}$$

On pourra rechercher une relation matricielle du type $X_{n+1} = AX_n$ *et réduire* A.

• On pose: $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ alors $X_{n+1} = AX_n \Leftrightarrow \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ où $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ de sorte que,

par une récurrence simple immédiate avec la propriété HR_n : « $X_n = A^nX_0$ », on prouve: $\forall n\in\mathbb{N}$, $X_n = A^nX_0$

• On calcule la matrice A^n en réduisant la matrice A:

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x-3 & 3 & -2 \\ 1 & x-5 & 2 \\ 1 & -3 & x \end{vmatrix} \underset{C_1\leftarrow C_1+C_2+C_3}{=} \begin{vmatrix} x-2 & 3 & -2 \\ x-2 & x-5 & 2 \\ x-2 & -3 & x \end{vmatrix} = (x-2)\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & x-8 & 4 \\ 0 & -6 & x+2 \end{vmatrix}_{\substack{L_2\leftarrow L_2-L_1 \\ L_3\leftarrow L_3-L_1}}$$

Aussi: $\chi_A(x) = (x-2)\Big((x-8)(x+2) + 24\Big) = (x-2)(x^2 - 6x + 8) = (x-2)^2(x-4)$

Ainsi: <u>χ_A est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ (1)</u> avec $\mathrm{Sp}(A) = \{2,4\}$ de multiplicité $m(2) = 2$ et $m(4) = 1$

Précisons $E_2(A) = \mathrm{Ker}\,(A - 2I_3) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$: en notant C_j la colonne j de $A - 2I_3$, on a $\begin{cases} C_2 = 3C_1 \\ C_3 = -2C_1 \end{cases}$

et: $\mathrm{rg}(A - 2I_3) = 1 \Rightarrow \dim E_2(A) = 3 - 1 = 2$ par le théorème du rang.

Alors: $\begin{cases} \dim E_2(A) = m(2) \\ \dim E_4(A) = 1 = m(4) \text{ (valeur propre simple)} \end{cases} \Leftrightarrow$ <u>$\forall\lambda\in\mathrm{Sp}(A),\ \dim E_\lambda(A) = m(\lambda)$ (2)</u>

Dès lors: $\begin{cases} (1) \\ (2) \end{cases} \Leftrightarrow$ <u>A est diagonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$</u>

Comme $\dim E_2(A) = 2$, on obtient une base de $E_2(A)$ si on trouve deux vecteurs de $E_2(A)$ non colinéaires: on vérifie que $u_1 = (3,1,0)$ et $u_2 = (2,0,-1)$ sont deux vecteurs non colinéaire de $E_2(A)$ donc ils forment une base de $E_2(A)$.

Comme $\dim E_4(A) = 1$, on obtient une base de $E_4(A)$ si on trouve un vecteur non nul de $E_4(A) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$

et on remarque que $u_3 = (-1,1,1)$ convient. Finalement: (u_1,u_2,u_3) est une base de diagonalisation de A et

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ vérifie } D = P^{-1}AP \Leftrightarrow A = PDP^{-1}$$

Les matrices A et D représente le même endomorphisme f dans des bases distinctes reliées par la matrice de passage P. Les matrices A^n et D représente alors aussi le même endomorphisme f^n dans ces mêmes bases distinctes reliées par P d'où: $A^n = PD^nP^{-1}$

• On calcule P^{-1}:

si $\mathscr{B} = (e_1,e_2,e_3)$ est la base canonique et $\mathscr{B}' = (u_1,u_2,u_3)$ celle de diagonalisation, $P = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')$ et $P^{-1} = P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B})$

Or: $\begin{cases} u_1 = 3e_1 + e_2 \\ u_2 = 2e_1 - e_3 \\ u_3 = -e_1 + e_2 + e_3 \end{cases} \underset{L_1\leftarrow L_1-L_2-L_3}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 2e_1 = u_1 - u_2 - u_3 \\ e_3 = 2e_1 - u_2 = u_1 - 2u_2 - u_3 \\ e_2 = u_3 + e_1 - e_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e_1 = \frac{1}{2}u_1 - \frac{1}{2}u_2 - \frac{1}{2}u_3 \\ e_3 = u_1 - 2u_2 - u_3 \\ e_2 = -\frac{1}{2}u_1 + \frac{3}{2}u_2 + \frac{3}{2}u_3 \end{cases}$

Ainsi: $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -2 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix}$ *On peut aussi utiliser l'algorithme de Gauss-Jordan pour calculer* P^{-1}

Ainsi: $X_n = PD^nP^{-1}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = PD^n\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} 0 \\ -2^n \\ 0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -2\times 2^n \\ 0 \\ 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}}$