Résolution d'une EDP par changement de variables

Le tableau suivant doit vous aider à bien comprendre le fonctionnement d'un changement de variables :

<table>
<tr><th>Anciennes variables (x,y)</th><th>Nouvelles variable (u,v)</th></tr>
<tr><td>$(x,y)\in\mathscr{U}$</td><td>$(u,v)\in\mathscr{V}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">On connaît l'une des applications $[(x,y)\mapsto(u,v)=\Phi(x,y)]$ ou $[(u,v)\mapsto(x,y)=\Psi(u,v)]$
Les applications Φ et Ψ sont des bijections réciproques entre $\mathscr{U}$ et $\mathscr{V}$
mais on ne sait pas toujours bien expliciter la réciproque (et ce n'est pas un attendu du programme)
Par exemple, pour le passage en coordonnées polaires : $(x,y)=\Psi(r,\theta)=\big(r\cos\theta,r\sin\theta\big)$
mais l'expression de $\Phi=\Psi^{-1}$ càd exprimer r et θ à l'aide de x et y n'est pas un problème simple</td></tr>
<tr><td>f fonction inconnue de variables (x,y)
de variables (x,y)
f peut admettre des dérivées selon x ou y
mais pas selon u et v !</td><td>g nouvelle fonction inconnue
de variables (u,v)
g peut admettre des dérivées selon u ou v
mais pas selon x et y !</td></tr>
<tr><td colspan="2">On a $f(x,y)=g(u,v)$
• si on connaît (x,y) en fonction de (u,v) : $g(u,v)=f\big(x(u,v),y(u,v)\big)$
et on peut calculer $\dfrac{\partial g}{\partial u}$ et $\dfrac{\partial g}{\partial v}$ à l'aide de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$
• si on connaît (u,v) en fonction de (x,y) : $f(x,y)=g\big(u(x,y),v(x,y)\big)$
et on peut calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ à l'aide de $\dfrac{\partial g}{\partial u}$ et $\dfrac{\partial g}{\partial v}$</td></tr>
<tr><td>f vérifie une équation (E) sur $\mathscr{U}$</td><td>g vérifie une nouvelle équation (E′) sur $\mathscr{V}$</td></tr>
<tr><td colspan="2"><u>Objectif</u> : connaissant (E) et $\mathscr{U}$, on chercher (E′) et $\mathscr{V}$ et on résout (E′) à priori plus simple
si possible, on traduit les solutions g de (E′) en solutions f de (E)
Si on peut, il est plus pertinent de calculer les dérivées partielles de f en fonction de celles de g car
il suffit alors de substituer dans (E) pour trouver (E′)</td></tr>
</table>

• Trouver les fonctions f de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ vérifiant $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$ en posant $\begin{cases} u=x-cy\\ v=x+cy\end{cases}$

$\begin{cases} u=x-cy\\ v=x+cy\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{u+v}{2}\\ y=\dfrac{v-u}{2c}\end{cases}$ et : $(x,y)\in\mathbb{R}^2\Leftrightarrow(u,v)\in\mathbb{R}^2$

On introduit g en variable (u,v) de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ de sorte que $f(x,y)=g(x-cy,x+cy)$.

Alors : $\dfrac{\partial f}{\partial x}=1\times\dfrac{\partial g}{\partial u}+1\times\dfrac{\partial g}{\partial v}$ puis $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial v\partial u}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2}=\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2}+2\dfrac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2}$

et : $\dfrac{\partial f}{\partial y}=-c\times\dfrac{\partial g}{\partial u}+c\times\dfrac{\partial g}{\partial v}$ puis $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=(-c)^2\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2}+(-c)\times c\dfrac{\partial^2 g}{\partial v\partial u}+c\times(-c)\dfrac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}+c^2\dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2}$

autrement dit : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=c^2\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2}-2c^2\dfrac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}+c^2\dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2}$ mais alors :

(E) : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0\Leftrightarrow\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2}+2\dfrac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2}-\dfrac{1}{c^2}\left(c^2\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2}-2c^2\dfrac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}+c^2\dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2}\right)=0\Leftrightarrow 4\dfrac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}=0$ (équation (E′))

f solution de (E) sur $\mathbb{R}^2\Leftrightarrow g$ solution de (E′) sur $\mathbb{R}^2\Leftrightarrow\dfrac{\partial g}{\partial v}(u,v)=\varphi(v)$ où $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe C^1

$\Leftrightarrow g(u,v)=\Phi(v)+\Psi(u)$ où $\Phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ et $\Psi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sont C^2

Ainsi : $\boxed{f \text{ solution de (E) sur } \mathbb{R}^2\Leftrightarrow f(x,y)=\Phi(x+cy)+\Psi(x-cy) \text{ où } \Phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \text{ et } \Psi:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \text{ sont } C^2}$

$\boxed{\text{EXEMPLE 11}}$ Déterminer les fonctions réelles (définies sur $\mathbb{R}^2$ sauf pour Q9 où f définie sur $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$) vérifiant :

1) $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0$ 2) $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x$ 3) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2f(x,y)$

4) $\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix}y^2\\2xy+1\end{pmatrix}$ 5) $\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix}y\\y\end{pmatrix}$ 6) $\nabla f(x,y,z)=\begin{pmatrix}2zx+y^2\\2xy+z^2\\2yz+x^2\end{pmatrix}$

7) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=0$ 8) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=x+y$ 9) $2y\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$

On cherchera les fonctions de classe C^1 ou de classe C^2 sur le domaine qui sont solutions du problème.

1. $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0\Leftrightarrow\boxed{f(x,y)=\varphi(x) \text{ où } \varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \text{ est de classe } C^1}$

f doit aussi admettre des dérivées partielles selon x continue ce qui oblige φ à être suffisamment régulière.

2. $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x\Leftrightarrow\boxed{f(x,y)=xy+\varphi(x) \text{ où } \varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \text{ de classe } C^1}$

3. On identifie une EDL1 $u'=2u$ en la variable x donc $\boxed{f(x,y)=C(y)e^{2x} \text{ où } C:\mathbb{R}\to\mathbb{R}}$

4. $\overrightarrow{\text{grad}}f(x,y)=\begin{pmatrix}y^2\\2xy+1\end{pmatrix}\Leftrightarrow f(x,y)=xy^2+\varphi(y)$ où $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ vérifie $2xy+\varphi'(y)=2xy+1$

Attention ! On ne peut pas traiter séparément les équations : l'information obtenue sur la première équation est réinjectée dans la seconde équation.

$\Leftrightarrow f(x,y)=xy^2+\varphi(y)$ et $\varphi'(y)=1$

$\Leftrightarrow f(x,y)=xy^2+\varphi(y)$ et $\varphi(y)=y+\lambda$ où $\lambda\in\mathbb{R}$

(pas de dépendance en x car φ n'est fonction que de y)

$\Leftrightarrow\boxed{f(x,y)=xy^2+y+\lambda \text{ où } \lambda\in\mathbb{R}}$

5. $\overrightarrow{\text{grad}}f(x,y)=\begin{pmatrix}y\\y\end{pmatrix}\Leftrightarrow f(x,y)=xy+\varphi(y)$ où $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est dérivable avec : $\underbrace{x+\varphi'(y)=y}_{\text{IMPOSSIBLE}}$ $\boxed{\text{PAS DE SOLUTION}}$

6. $\nabla f(x,y,z)=\begin{pmatrix}2zx+y^2\\2xy+z^2\\2yz+x^2\end{pmatrix}\Leftrightarrow f(x,y,z)=zx^2+xy^2+\varphi(y,z)$ avec $\begin{pmatrix}2xy+\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y)\\x^2+\frac{\partial\varphi}{\partial z}(x,y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2xy+z^2\\2yz+x^2\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow f(x,y,z)=zx^2+xy^2+\varphi(y,z)$ et $\varphi(y,z)=yz^2+C(z)$ avec $2yz+C'(z)=2yz\Leftrightarrow C'(z)=K\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow\boxed{f(x,y,z)=zx^2+xy^2+yz^2+K \text{ où } K\in\mathbb{R}}$

7. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=0\Leftrightarrow\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\varphi(y)$ où $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe $C^1\Leftrightarrow\boxed{f(x,y)=\Phi(y)+\Psi(x) \text{ où } \Phi,\Psi:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \text{ sont } C^2}$

Φ est une primitive de φ : elle existe car φ est continue et Φ est de classe C^2 puisque φ est C^1

8. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=x+y\Leftrightarrow\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\dfrac{x^2}{2}+yx+\varphi(y)$ où $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est de classe C^1

$\Leftrightarrow\boxed{f(x,y)=\dfrac{x^3}{6}+y\dfrac{x^2}{2}+\varphi(y)x+\Psi(y) \text{ où } \varphi,\psi:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \text{ sont de classe } C^2}$

9. Si $h=\dfrac{\partial f}{\partial x}$ alors $2y\dfrac{\partial h}{\partial y}-h(x,y)=0\Leftrightarrow\dfrac{\partial h}{\partial y}-\dfrac{1}{2y}h(x,y)=0$

C'est une EDL1 homogène aussi : $h(x,y)=C(x)e^{\frac{1}{2}\ln y}=\sqrt{y}C(x)$ où $C:]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ de classe C^1

Aussi : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\sqrt{y}C(x)$ où $C:]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ de classe $C^1\Leftrightarrow f(x,y)=\sqrt{y}\big(\Gamma(x)+\lambda\big)$ où $\Gamma:]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ de classe C^2

Γ est une primitive de C : elle existe car C est continue et Γ est de classe C^2 puisque C est C^1

PT : Correction du TD n° 3 sur le chapitre IX

EXERCICE N° 3 Déterminer les fonctions solution de

1. $2\dfrac{\partial f}{\partial x}-\dfrac{\partial f}{\partial y}=xy$ avec f de classe C^1 sur $\mathcal{U}=\mathbb{R}^2$ en posant $\begin{cases} u=x \\ v=x+2y\end{cases}$

Soit g avec $f(x,y)=g(u,v)$ où $\begin{cases} u=x \\ v=x+2y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=u \\ y=\frac{v-u}{2}\end{cases}$ soit: $f(x,y)=g(x,x+2y)\Leftrightarrow g(u,v)=f\left(u,\dfrac{v-u}{2}\right)$

donc g sera aussi de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et on a: $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\dfrac{\partial g}{\partial u}(u,v)+\dfrac{\partial g}{\partial v}(u,v)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2\dfrac{\partial g}{\partial v}(u,v)$

Aussi: $2\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)-\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=xy\Leftrightarrow 2\dfrac{\partial g}{\partial u}(u,v)=u\left(\dfrac{v-u}{2}\right)\Leftrightarrow g(u,v)=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{u^2v}{2}-\dfrac{u^3}{3}\right)+\varphi(v)$ où $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est C^1

Finalement: $\boxed{\text{les solutions ont pour expression } f(x,y)=\dfrac{x(x+2y)}{8}-\dfrac{x^3}{12}+\varphi(x+2y) \text{ où } \varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \text{ est } C^1}$

2. $x^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}-y^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$ avec f de classe C^2 sur $\mathcal{U}=(]0,+\infty[)^2$ en posant $\begin{cases} u=xy \\ v=\dfrac{x}{y}\end{cases}$

On a: $\begin{cases} u=xy>0 \\ v=\dfrac{x}{y}>0 \\ x>0,y>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x^2=uv \\ y^2=\frac{u}{v} \\ u>0,v>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=\sqrt{uv} \\ y=\sqrt{\frac{u}{v}} \\ u>0,v>0\end{cases}$

Soit $g:(u,v)\in\mathcal{U}\mapsto g(u,v)$ de classe C^2 sur $]0,+\infty[^2$ avec $f(x,y)=g\left(xy,\dfrac{x}{y}\right)$, alors (avec l'abus de notations usuelles):

$\dfrac{\partial f}{\partial x}=y\dfrac{\partial g}{\partial u}+\dfrac{1}{y}\dfrac{\partial g}{\partial v}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}=x\dfrac{\partial g}{\partial u}-\dfrac{x}{y^2}\dfrac{\partial g}{\partial v}$

puis $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=y^2\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial v\partial u}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}+\dfrac{1}{y^2}\dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2}=y^2\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2}+2\dfrac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}+\dfrac{1}{y^2}\dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2}$ car $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}=\dfrac{\partial^2 g}{\partial v\partial u}$ puisque g est C^2 sur $\mathcal{U}$

et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=x^2\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2}-\dfrac{x^2}{y^2}\dfrac{\partial^2 g}{\partial v\partial u}+\dfrac{2x}{y^3}\dfrac{\partial g}{\partial v}-\dfrac{x^2}{y^2}\dfrac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}+\dfrac{x^2}{y^4}\dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2}=x^2\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2}+\dfrac{2x}{y^3}\dfrac{\partial g}{\partial v}-2\dfrac{x^2}{y^2}\dfrac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}+\dfrac{x^2}{y^4}\dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2}$

Aussi: $x^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}-y^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0\Leftrightarrow 4x^2\dfrac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}-2\dfrac{x}{y}\dfrac{\partial g}{\partial v}=0\Leftrightarrow_{\text{en divisant par } 4x^2}\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{\partial g}{\partial v}\right)-\dfrac{1}{2u}\dfrac{\partial g}{\partial v}=0\quad(*)$

Cela signifie que $\left[u\mapsto\dfrac{\partial g}{\partial v}(u,v)\right]$ est solution sur $]0,+\infty[$ de l'équation différentielle (E) : $y'-\dfrac{1}{2t}y=0$

Les solutions de (E) ont pour expression: $y(t)=k\exp\left(\dfrac{\ln t}{2}\right)=k\sqrt{t}$ avec $k\in\mathbb{R}$

L'équation $(*)$ est une équation où on dérive par rapport à u à v constant donc la constante k dépendra de v.

Ainsi: f est solution $\Leftrightarrow\dfrac{\partial g}{\partial v}(u,v)=k(v)\sqrt{u}$ où $k:]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ est de classe C^1 (k est C^1 car g doit être C^2 sur $\mathcal{U}$)

$\Leftrightarrow g(u,v)=K(v)\sqrt{u}+C(u)$ où $K,C:]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ sont C^2 (K est une primitive de k qui est C^1)

$\Leftrightarrow\boxed{f(x,y)=K\left(\dfrac{x}{y}\right)\sqrt{xy}+C(xy) \text{ où } K,C:]0,+\infty[\to\mathbb{R} \text{ sont } C^2}$

EXEMPLE 12

• Trouver les fonctions f de classe C^1 sur l'ouvert $\mathcal{U}=]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ vérifiant $x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}=\sqrt{x^2+y^2}$ en passant en coordonnées polaires.

On pose $(x,y)=\big(r\cos\theta,r\sin\theta\big)$ en introduisant $g(r,\theta)=f(r\cos\theta,r\sin\theta)$

$\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{r^2}=r$ si $r>0$ et $\theta=\operatorname{Arctan}\dfrac{y}{x}\in\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ lorsque $x>0$(faire un dessin!)

Pour $(r,\theta)\in\mathcal{V}=]0,+\infty[\times\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$, $(x,y)=\big(r\cos\theta,r\sin\theta\big)\in]0,+\infty[\times\mathbb{R}$. Si f est de classe C^1 sur $\mathcal{U}=]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ alors g sera bien C^1 sur $\mathcal{V}=]0,+\infty[\times\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ par composition et : $\dfrac{\partial g}{\partial r}=(\cos\theta)\dfrac{\partial f}{\partial x}+(\sin\theta)\dfrac{\partial f}{\partial y}$

$\forall(x,y)\in\mathcal{U},\quad x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$

$\Leftrightarrow\forall(r,\theta)\in\mathcal{V},(\cancel{r}\cos\theta)\dfrac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta,r\sin\theta)+(\cancel{r}\sin\theta)\dfrac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta,r\sin\theta)=\cancel{r}$

$\Leftrightarrow\forall(r,\theta)\in\mathcal{V},\dfrac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)=1$

$\Leftrightarrow\forall(r,\theta)\in\mathcal{V},g(r,\theta)=r+\varphi(\theta)$ où $\varphi:\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[\to\mathbb{R}$ est de classe C^1

$\Leftrightarrow\boxed{\forall(x,y)\in\mathcal{U},\ f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}+\varphi\left(\operatorname{Arctan}\dfrac{y}{x}\right)\text{ où }\varphi:\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[\to\mathbb{R}\text{ est de classe }C^1}$

PT : Correction du TD n° 4 sur le chapitre IX

EXERCICE N° 4 On considère une application f de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et on définit alors F par :

$$F(x,y)=\int_{-x}^{y}e^{x+t}f(2x+t)\,dt$$

1. Justifier que F est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ *On pourra poser $u=2x+t$*

$du=dt,\quad t\left|\begin{matrix} y\\ -x\end{matrix}\right.\Leftrightarrow u\left|\begin{matrix} 2x+y\\ x\end{matrix}\right.$ d'où : $F(x,y)=\displaystyle\int_x^{2x+y}e^{u-x}f(u)du=e^{-x}\int_x^{2x+y}e^u f(u)du$

On introduit la primitive G de la fonction $[u\mapsto e^u f(u)]$ qui est de classe C^3 alors :

$$F(x,y)=e^{-x}\Big(G(2x+y)-G(x)\Big)$$

Par composition : $[(x,y)\mapsto G(2x+y)]$ et $[(x,y)\mapsto G(x)]$ sont de classe C^2 (même C^3) sur $\mathbb{R}^2$.
Par somme et produit, F est donc de classe C^2 (même C^3) sur $\mathbb{R}^2$

2. Trouver f pour que F soit solution de $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}+2\dfrac{\partial F}{\partial x}-4\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}+F=1$

On a : $\dfrac{\partial F}{\partial x}=-F(x,y)+e^{-x}\Big(2g(2x+y)-g(x)\Big)=-F(x,y)+2e^{x+y}f(2x+y)-f(x)$

$\dfrac{\partial F}{\partial y}=e^{-x}\times g(2x+y)=e^{x+y}f(2x+y)$

$\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}=-\dfrac{\partial F}{\partial x}+2e^{x+y}f(2x+y)+2e^{x+y}\times 2f'(2x+y)-f'(x)=F(x,y)+f(x)+4e^{x+y}f'(2x+y)-f'(x)$

$\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}=e^{x+y}f(2x+y)+e^{x+y}f'(2x+y)$

Alors : $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}+2\dfrac{\partial F}{\partial x}-4\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}+F=1$

$\Leftrightarrow F(x,y)+f(x)+4e^{x+y}f'(2x+y)-f'(x)-2F(x,y)+4e^{x+y}f(2x+y)-2f(x)$
$-4e^{x+y}f(2x+y)-4e^{x+y}f'(2x+y)+F(x,y)=1$

$\Leftrightarrow -f'(x)-f(x)=1\Leftrightarrow f'+f=-1\Leftrightarrow f(x)=Ce^{-x}-1$

(car $[x\mapsto -1]$ est une solution triviale évidente)