PT : Correction du TD nº 3 sur le chapitre VII

EXERCICE Nº 5 En utilisant le théorème d'intégration terme à terme, démontrer que, pour tout $x > 0$ :

$$\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$$

• *Il s'agit d'abord de contextualiser en introduisant les notations pour appliquer le théorème*

Pour $t \in ]0,1]$ : $\mathrm{S}(t) = t^{x-1}e^{-t} = t^{x-1}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{t^{n+x-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ où $f_n(t) = (-1)^n\frac{t^{n+x-1}}{n!}$

• *On énonce clairement le théorème (sans faire de justification)*

Rappelons l'énoncé du théorème d'intégration terme à terme : $\mathrm{S}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ pour $t \in ]0,1]$ donc il s'agit de vérifier

i) S est continue sur $]0,1]$

ii) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n$ est intégrable sur $]0,1]$

iii) La série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ où $u_n = \int_0^{+\infty} |f_n(t)|\,\mathrm{d}t$ est convergente

On pourra alors conclure que S est intégrable sur $]0,1]$ et que $\int_0^1 \mathrm{S}(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t$

• *On vérifie les hypothèses du théorème une à une*

i) S est continue sur $]0,1]$ puisque $\mathrm{S}(t) = e^{(x-1)\ln t}e^{-t}$ donc $t > 0$ sur $]0,1]$

ii) $f_n$ est intégrable sur $]0,1]$ puisque $f_n(t) = \frac{(-1)^n}{n!}e^{(n+x-1)\ln t}$ donc $f_n$ est continue sur $]0,1]$ où $t > 0$ et en 0 :

$|f_n(t)| = \frac{1}{n!}\frac{1}{t^{1-x-n}}$ or $\left[t \mapsto \frac{1}{t^{1-x+n}}\right] = \left[t \mapsto \frac{1}{t^{\alpha}}\right]$ avec $\alpha = 1-x-n$ est une fonction de Riemann

Elle est intégrable sur $]0,1]$ lorsque $\alpha = 1-x-n < 1 \Leftrightarrow -x-n < 0 \Leftrightarrow x+n > 0$ toujours vrai puisque $x > 0$ et $n \geqslant 0$

iii) la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ où $u_n = \int_0^1 |f_n(t)|\,\mathrm{d}t$ converge

Or : $u_n = \int_0^1 \frac{1}{n!}t^{x+n-1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n!}\left[\frac{t^{x+n}}{x+n}\right]_0^1 = \frac{1}{n!}\times\frac{1}{x+n}(1-0)$ car $1^{x+n} = 1$ et $\lim\limits_{t\to 0} t^{x+n} = \lim\limits_{t\to 0} e^{(x+n)\ln t} = 0$ car $x+n > 0$

et alors : $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n!}\times\frac{1}{x}$ or $\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{n!}\times\frac{1}{x} = \frac{1}{x}\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{n!}$ converge (série de l'exponentielle ici de somme $\frac{e}{x}$)

• *On exploite ensuite les conclusions du théorème d'intégration terme à terme pour finaliser la question*

Toutes les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme sont vérifiées ainsi : S est intégrable sur $]0,1]$

et $\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \mathrm{S}(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\int_0^1 |f_n(t)|\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n u_n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$

on remarque que $f_n(t) = (-1)^n|f_n(t)|$



Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n(t) = e^{-nt} - 2e^{-2nt}$ pour $t > 0$

Montrer que les deux expressions suivantes existent mais qu'elles ne sont pas égales :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} u_n(t)\,\mathrm{d}t\right) \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t)\right)\mathrm{d}t$$

• $\boxed{\text{Existence de } \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} u_n(t)\,\mathrm{d}t\right)}$

On prouve la convergence de l'intégrale $\mathrm{I}_n = \int_0^{+\infty} u_n(t)\,\mathrm{d}t$ puis la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1}\mathrm{I}_n$

Tout d'abord, $u_n$ est continue sur $[0,+\infty[$ et on identifie une combinaison linéaire de fonctions exponentielles de référence intégrables ($n > 0$ et $2n > 0$) donc $u_n$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ avec :

$$\int_0^{+\infty} u_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-nt}\,\mathrm{d}t - 2\int_0^{+\infty} e^{-2nt}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{n}e^{-nt}\right]_0^{+\infty} - 2\left[-\frac{1}{2n}e^{-2nt}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{n} - 2\times\frac{1}{2n} = 0$$

Ainsi, la série $\sum\left(\int_0^{+\infty} u_n(t)\,\mathrm{d}t\right)$ converge et sa somme est nulle : $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} u_n(t)\,\mathrm{d}t\right) = 0$

• $\boxed{\text{Existence de } \int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t)\right)\mathrm{d}t}$ On prouve la convergence de la série pour obtenir l'existence de

$\mathrm{S}(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t)$ puis la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty}\mathrm{S}(t)\,\mathrm{d}t$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $t > 0$ : $u_n(t) = \left(e^{-t}\right)^n - 2\left(e^{2t}\right)^n$

Puisque $t > 0$, $e^{-t} \in ]0,1[$ et $e^{-2t} \in ]0,1[$ de sorte que les séries $\sum\left(e^{-t}\right)^n$ et $\sum\left(e^{-2t}\right)^n$ sont des séries géométriques convergentes. Ainsi, la série $\sum u_n(t)$ converge pour tout $t > 0$ et :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t) = e^{-t}\times\frac{1-0}{1-e^{-t}} - 2e^{-2t}\times\frac{1-0}{1-e^{-2t}} = \frac{1}{e^t-1} - \frac{2}{e^{2t}-1} &= \frac{1+e^{2t}-2e^t}{(e^t-1)(e^{2t}-1)}\\ &= \frac{(e^t-1)^2}{(e^t-1)(e^{2t}-1)} \text{ (identité remarquable au numérateur)}\\ &= \frac{e^t-1}{e^{2t}-1} = \frac{e^t-1}{(e^t-1)(e^t+1)} = \frac{1}{e^t+1} = \mathrm{S}(t)\end{aligned}$$

identité remarquable au dénominateur

Par quotient, S est continue sur $[0,+\infty[$ puisque $e^t + 1 \neq 0$ d'où une singularité en $+\infty$.

en $+\infty$ : $\mathrm{S}(t) \sim_{+\infty} \frac{1}{e^t} = e^{-t}$ or $[t \mapsto e^{-t}]$ est intégrable sur $[0,+\infty[$

Aussi, par critère d'équivalence, S est intégrable en $[0,+\infty[$

En définitive, S est intégrable sur $[0,+\infty[$ assurant l'existence de $\int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t)\right)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\mathrm{S}(t)\,\mathrm{d}t$

• Montrons par l'absurde que les deux expressions ne sont pas égales

• $\mathrm{S}(t) \geqslant 0$ pour $t > 0$ (quotient de deux nombres strictement positifs) et S est continue sur $]0,+\infty[$.

Si $\int_0^{+\infty}\underbrace{\mathrm{S}(t)}_{\geqslant 0}\,\mathrm{d}t = 0$ alors $\mathrm{S}(t) = 0$ pour $t > 0$ ce qui est absurde car $\mathrm{S}(t) = \frac{1}{e^t+1} > 0$ !

Les deux valeurs sont bien distinctes car l'une est nulle et l'autre pas

• Justifier qu'une des hypothèses du théorème d'intégration terme à terme est en défaut.

Ici, les hypothèses i) et ii) ont été vérifiée. C'est donc iii) qui ne doit pas l'être...

$u_n(t) = e^{-2nt}(e^{nt} - 2)$ a le signe de $e^{nt} - 2$ donc sera positif si $nt \geqslant \ln 2$ aussi $|u_n(t)| = \begin{cases} u_n(t) \text{ si } t \geqslant \frac{\ln 2}{n}\\ -u_n(t) \text{ sinon}\end{cases}$

$$\mathrm{J}_n = \int_0^{+\infty}|u_n(t)|\,\mathrm{d}t = -\int_0^{\frac{\ln 2}{n}} u_n(t)\,\mathrm{d}t + \int_{\frac{\ln 2}{n}}^{+\infty} u_n(t)\,\mathrm{d}t = -\left(\left[-\frac{1}{n}e^{-nt}\right]_0^{\frac{\ln 2}{n}} - 2\left[-\frac{1}{2n}e^{-2nt}\right]_0^{\frac{\ln 2}{n}}\right) + \left[-\frac{1}{n}e^{-nt}\right]_{\frac{\ln 2}{n}}^{+\infty} - 2\left[-\frac{1}{2n}e^{-2nt}\right]_{\frac{\ln 2}{n}}^{+\infty} = \cdots = \frac{3}{4n}$$

aussi iii) n'est pas vérifiée puisque la série $\sum_{n\geqslant 1}\mathrm{J}_n$ diverge car il s'agit d'une série de Riemann divergente ($\alpha = 1 \leqslant 1$)