

EXERCICE N° 2

On considère l'application ϕ définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ ($n \in \mathbb{N}^*$) par: $\phi(P) = nXP - (X^2 - 1)P'$

1. Justifier que ϕ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$

Il s'agit de vérifier que:

- ϕ est linéaire car: $\forall (P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2, \forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$\phi(\alpha P + Q) = nX(\alpha P + Q) - (X^2 - 1)(\alpha P + Q)' = \alpha(nXP - (X^2 - 1)P') + nXQ - (X^2 - 1)Q' = \alpha\phi(P) + \phi(Q)$$

- $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par Φ autrement dit $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \Phi(P) \in \mathbb{R}_n[X]$

Méthode 1: si $P \in \mathbb{R}_n[X]$ alors $P = aX^n + R$ où $\deg R < n$ et $a \in \mathbb{R}$ d'où

$$\phi(P) = anX^{n+1} + nXR - (X^2 - 1)(naX^{n-1} + R') = nXR - (X^2 - 1)R'$$

$$\deg(nXR) = 1 + \deg R \leq n \text{ car } < n + 1 \text{ et } \deg((X^2 - 1)R') \leq 2 + \deg R - 1 \leq 1 + \deg R \leq n \text{ aussi } \deg \phi(P) \leq n$$

Méthode 2: par linéarité de Φ , il suffit de vérifier que: $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \Phi(X^k) \in \mathbb{R}_n[X]$. Or: $\Phi(1) = nX$ et,

$$\text{si } k \geq 1: \Phi(X^k) = nX^{k+1} - (X^2 - 1)kX^{k-1} = (n - k)X^{k+1} + kX^{k-1} \in \mathbb{R}_n[X] \text{ (Pas de terme d'ordre } n + 1 \text{ si } k = n \text{ car } n - k = 0)$$

Remarque: la matrice associée à Φ dans $\mathcal{B}_{can} = (1, X, \dots, X^n)$ est $\text{Mat}_{\mathcal{B}_{can}}(\phi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ n & 0 & 2 & & & 0 \\ 0 & n-1 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ddots & 2 & 0 & n \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2. Démontrer que $\mathcal{B} = (1, X - 1, (X - 1)^2, \dots, (X - 1)^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$

$\mathcal{B}$ est une famille de polynôme à degrés échelonnés donc c'est une famille libre. Elle contient $n + 1$ polynômes qui sont tous dans $\mathbb{R}_n[X]$ or $\dim \mathbb{R}_n[X] = n + 1$ aussi c'est bien une base de $\mathbb{R}_n[X]$

3. Déterminer la matrice de ϕ dans cette base.

On calcule $\phi((X - 1)^k)$ pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ qu'on exprime dans la base $\mathcal{B} = (1, X - 1, (X - 1)^2, \dots, (X - 1)^n)$:

$$\text{pour } k = 0: \phi(1) = nX = n(X - 1) + n$$

pour $k \geq 1$:

$$\phi((X - 1)^k) = nX(X - 1)^k - (X^2 - 1) \times k(X - 1)^{k-1} = nX(X - 1)^k - (X + 1) \times k(X - 1)^k = nX(X - 1)^k - k(X + 1)(X - 1)^k$$

$$\text{soit } \phi((X - 1)^k) = \underbrace{((n - k)X - k)}_{=(n-k)(X-1)+(n-k)-k} (X - 1)^k = (n - k)(X - 1)^{k+1} + (n - 2k)(X - 1)^k$$

$$\text{Ainsi: } \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi) = \begin{pmatrix} n & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ n & n-2 & 0 & & & 0 \\ 0 & n-1 & n-4 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ddots & 2 & n-2(n-1) & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & n-2n \end{pmatrix} = M$$

4. L'application ϕ est-elle diagonalisable ?

La matrice de ϕ dans M est triangulaire aussi on peut trouver facilement le polynôme caractéristique de ϕ

$$\chi_{\phi}(x) = \det(xI_n - M) = \prod_{k=0}^n (x - (n - 2k))$$

Le polynôme caractéristique est scindé à racines simples dans $\mathbb{R}[X]$ donc ϕ est diagonalisable.

1. Montrer que Φ est un endomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$ et déterminer ses éléments propres.

Il s'agit de vérifier :

- Φ est linéaire c-à-d : $\forall (M, N) \in M_n(\mathbb{R})^2, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \Phi(\alpha M + N) = \alpha \Phi(M) + \Phi(N)$

- pour tout $M \in M_n(\mathbb{R}), \Phi(M) \in M_n(\mathbb{R})$

Si $M \in M_n(\mathbb{R})$, alors $\text{tr}(A)$ et $\text{tr}(M)$ sont des réels et donc $\Phi(M) = \text{tr}(A)M - \text{tr}(M)A$ est dans $M_n(\mathbb{R})$ car c'est une combinaison linéaire des matrices A et M . Pour la linéarité, on rappelle que la trace est une application linéaire aussi : $\Phi(\alpha M + N) = \text{tr}(A)(\alpha M + N) - (\alpha \text{tr}(M) + \text{tr}(N))A = \alpha(\text{tr}(A)M - \text{tr}(M)A) + (\text{tr}(A)N - \text{tr}(N)A) = \alpha \Phi(M) + \Phi(N)$

Pour la recherche des valeurs propres, utiliser un polynôme caractéristique qu'on devrait calculer à l'aide d'un déterminant d'ordre n puis chercher les racines d'un polynôme de degré n , ça fait pas vraiment envie... On essaye donc plutôt une recherche de valeurs propres avec la définition.

$\lambda \in \text{Sp}(\Phi)$ lorsqu'il existe $M \neq 0$ avec $\Phi(M) = \lambda M \Leftrightarrow \text{tr}(A)M - \text{tr}(M)A = \lambda M \Leftrightarrow (\text{tr}(A) - \lambda)M = \text{tr}(M)A$

En composant par la trace dans cette égalité, on a, par linéarité : $(\text{tr}(A) - \lambda)\text{tr}(M) = \text{tr}(M)\text{tr}(A) \Leftrightarrow -\lambda \text{tr}(M) = 0$

Il y a alors deux possibilités : $\lambda = 0$ ou $\text{tr}(M) = 0$

- si $\lambda = 0$ et alors :

$$\Phi(M) = 0 \Leftrightarrow \text{tr}(A)M = \text{tr}(M)A \Leftrightarrow M = \frac{\text{tr}(M)}{\text{tr}(A)}A \in \text{Vect}(A) \text{ (car } \text{tr}(A) \neq 0 \text{) donc } \text{Ker } \Phi \subset \text{Vect}(A)$$

mais, si $M = \alpha A$ alors $\Phi(M) = \text{tr}(A) \times \alpha A - \text{tr}(\alpha A)A = 0$ puisque $\text{tr}(\alpha A) = \alpha \text{tr}(A)$ donc : $\text{Vect}(A) \subset \text{Ker}(\Phi)$

Ainsi : $\text{Ker } \Phi = \text{Vect}(A) \neq \{0\}$ donc $E_0(\Phi) \neq \{0\}$ et on a bien 0 qui est valeur propre de Φ

- si $\text{tr}(M) = 0$ alors $\Phi(M) = \lambda M \Leftrightarrow \text{tr}(A)M = \lambda M \Leftrightarrow (\text{tr}(A) - \lambda)M = 0 \Leftrightarrow \lambda = \text{tr}(A)$ car $M \neq 0$

et alors : $M \in E_{\text{tr}(A)}(\Phi) \Leftrightarrow \Phi(M) = \text{tr}(A)M \Leftrightarrow -\text{tr}(M)A = 0 \Leftrightarrow \text{tr}(M) = 0$ car $A \neq 0$

Finalement : $E_{\text{tr}(A)}(\Phi) = \text{Ker tr}$ qui est un hyperplan de $M_n(\mathbb{R})$ donc de dimension $n^2 - 1$

(la trace est une application linéaire non nulle car $\text{tr}(I_n) = n \neq 0$ définie sur $M_n(\mathbb{R})$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ de sorte que son image $\text{Im tr} = \mathbb{R}$ (incluse dans $\mathbb{R}$ et de dimension ≥ 1) ce qui permet d'obtenir $\dim \text{Ker tr}$ par le théorème du rang)

Finalement : $\text{Sp}(\Phi) = \{0, \text{tr}(A)\}$ avec $E_0(\Phi) = \text{Vect}(A)$ et $E_{\text{tr}(A)}(\Phi) = \text{Ker}(\text{tr})$ de dimension $n^2 - 1$

2. L'endomorphisme Φ est-il diagonalisable?

On sait que : $1 \leq \dim E_\lambda(\Phi) \leq m(\lambda)$ donc $m(0) \geq 1$ et $m(\text{tr}(A)) \geq n^2 - 1$

Mais : $m(0) + m(\text{tr}(A)) = n^2$ (le polynôme caractéristique est de degré $\dim M_n(\mathbb{R}) = n^2$ donc en fait :

$$m(0) = 1 \text{ et } m(\text{tr}(A)) = n^2 - 1$$

Ainsi : $\chi_\Phi(x) = x(x - \text{tr}(A))^{n^2 - 1}$ Il est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ et : $\forall \lambda \in \text{Sp}(\Phi), m(\lambda) = \dim E_\lambda(\Phi)$

La CNS de diagonalisation est vérifiée donc Φ est diagonalisable.

EXERCICE N° 4

Soient $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$ et $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in M_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$a_{k,1} = a_{1,k} = 1 \text{ pour } k \geq 2 \text{ et les autres coefficients sont nuls}$$

1. Déterminer le rang de A. Que peut-on en déduire sur le spectre de A?

On a $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ aussi, en notant C_j la colonne j : $C_2 = C_3 = \dots = C_n$ $\text{rg}(A) = \dim \text{Vect}(C_1, C_2) = 2$ vu

que C_1 et C_2 sont non colinéaire.

Par le théorème du rang, on obtient : $\dim \text{Ker}(A) = n - \text{rg}(A) = n - 2$ aussi $0 \in \text{Sp}(A)$ avec $m(0) \geq n - 2$

2. Calculer A^3 en fonction de A. Que peut-on en déduire sur le spectre de A

On calcule A^2 en post-multipliant A par A donc on agit sur les colonnes :

- la colonne 1 de A^2 s'obtient en sommant toutes les colonnes C_2 à C_n de A donc c'est $(n-1, 0, \dots, 0)$

- les colonnes 2 à n de A^2 valent la colonne 1 de A donc c'est $(0, 1, \dots, 1)$

De même, on calcule A^3 en post-multipliant A^2 par A donc on agit sur les colonnes :

- la colonne 1 de A^3 s'obtient en sommant toutes les colonnes 2 à n de A^2 donc c'est $(0, n-1, \dots, n-1)$

- les colonnes 2 à n de A^3 valent la colonne 1 de A^2 donc elles n'ont que des 1 soit $(n-1, 0, \dots, 0)$

$$\text{Ainsi : } A^3 = (n-1)A$$

Si $\lambda \in \text{Sp}(A)$ associé au vecteur propre $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ alors : $AX = \lambda X \Rightarrow A^2X = \lambda AX = \lambda^2 X \Rightarrow A^3X = \lambda^2 AX = \lambda^3 X$

$$A^3X = (n-1)AX \Leftrightarrow \lambda^3 X = (n-1)\lambda X \Leftrightarrow \lambda^3 = (n-1)\lambda \Leftrightarrow \lambda(\lambda^2 - (n-1)) = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \left\{ -\sqrt{n-1}, 0, \sqrt{n-1} \right\}$$

$$\text{Aussi : } \text{Sp}(A) \subset \left\{ -\sqrt{n-1}, 0, \sqrt{n-1} \right\}$$

3. Déterminer le polynôme caractéristique de A sans aucun calcul de déterminant.

On cherche $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ avec

$$AX = \sqrt{n-1}X \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 + \dots + x_n = \sqrt{n-1}x_1 \\ x_1 = \sqrt{n-1}x_2 \\ \vdots \\ x_1 = \sqrt{n-1}x_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{n-1}{\sqrt{n-1}}x_1 = \sqrt{n-1}x_1 \\ x_1 = \sqrt{n-1}x_2 \\ \vdots \\ x_1 = \sqrt{n-1}x_n \end{cases} \Leftrightarrow X = x_1 \left(1, \frac{1}{\sqrt{n-1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n-1}} \right)$$

Ainsi : $\lambda_1 = \sqrt{n-1}$ est une valeur propre de A et $E_{\sqrt{n-1}}(A)$ est la droite engendrée par $\left(1, \frac{1}{\sqrt{n-1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n-1}} \right)$

De même : $\lambda_2 = -\sqrt{n-1}$ est une valeur propre de A et $E_{-\sqrt{n-1}}(A)$ est la droite engendrée par $\left(1, -\frac{1}{\sqrt{n-1}}, \dots, -\frac{1}{\sqrt{n-1}} \right)$

On sait aussi que $\lambda = 0$ est une valeur propre avec $m(0) \geq n-2$.

On a : $m(\lambda_1) \geq 1$ et $m(\lambda_2) \geq 1$ et enfin : $m(\lambda) + m(\lambda_1) + m(\lambda_2) = n$ donc finalement : $m(0) = n-2$, $m(\lambda_1) = 1 = m(\lambda_2)$

Et on peut conclure que : $\chi_A(x) = x^{n-2}(x - \lambda_1)(x - \lambda_2)$

4. La matrice A est-elle diagonalisable?

La matrice A est symétrique réelle donc elle est diagonalisable.

OU BIEN : Le polynôme caractéristique de la matrice est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ et, pour chacune des valeurs propres, la dimension de l'espace propre est égale à la multiplicité donc, d'après le CNS de diagonalisation, A est diagonalisable.