PT : Correction du TD n°3 sur le chapitre IV

EXERCICE N° 5 On considère la courbe $\Gamma : \begin{cases} x(t) = 2\,\mathrm{ch}(t) \\ y(t) = 3\,\mathrm{sh}(t) \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$

1. Reconnaître la courbe Γ et proposer en une esquisse sans aucune étude supplémentaire.

On reconnaît la représentation paramétrique de la branche de l'hyperbole de centre O d'axe $O + \mathrm{Vect}(\vec{\imath})$ avec $a = 2$ et $b = 3$ situé dans le demi-plan $x \geqslant 0$. Le sommet a pour coordonnées $(2, 0)$ et les asymptotes sont les droites $O + \mathrm{Vect}(2\vec{\imath} \pm 3\vec{\jmath})$ soit d'équation $y = \pm\dfrac{3}{2}x$

2. Déterminer le repère de Frénet au point de paramètre $M(t)$ de la courbe Γ

x et y sont de classe C^1 avec $\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,\mathrm{sh}\,t \\ 3\,\mathrm{ch}\,t \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ aussi $s'(t) = \left\| \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right\| = \sqrt{4\,\mathrm{sh}^2 t + 9\,\mathrm{ch}^2 t} = \sqrt{9 + 13\,\mathrm{sh}^2 t}$

vu que $\mathrm{ch}^2 t = 1 + \mathrm{sh}^2 t$ alors : $\vec{T} = \dfrac{1}{\sqrt{9+13\,\mathrm{sh}^2 t}} \begin{pmatrix} 2\,\mathrm{sh}\,t \\ 3\,\mathrm{ch}\,t \end{pmatrix}$ puis $\vec{N} = \dfrac{1}{\sqrt{9+13\,\mathrm{sh}^2 t}} \begin{pmatrix} -3\,\mathrm{ch}\,t \\ 2\,\mathrm{sh}\,t \end{pmatrix}$

3. Justifier que le rayon de courbure $R(t)$ au point $M(t)$ de la courbe Γ est $R(t) = -\dfrac{1}{6}(9 + 13\,\mathrm{sh}^2 t)^{\frac{3}{2}}$

On sait que $R(t) = \dfrac{1}{\gamma(t)}$ où $\gamma(t)$ est la courbure qu'on obtient à l'aide de la formules de Frénet :

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \gamma\vec{N} \Leftrightarrow \frac{1}{s'(t)}\frac{d\vec{T}}{dt} = \gamma\vec{N}$$

On compare les abscisses pour déterminer γ :

$$(9+13\,\mathrm{sh}^2 t)^{-\frac{1}{2}} \times \left(-\frac{1}{2} \times 13 \times 2\,\mathrm{ch}(t)\,\mathrm{sh}(t) \times (9+13\,\mathrm{sh}^2 t)^{-\frac{3}{2}} \times 2\,\mathrm{sh}\,t + (9+13\,\mathrm{sh}^2 t)^{-\frac{1}{2}} \times 2\,\mathrm{ch}\,t\right)$$
$$= \gamma \times (9+13\,\mathrm{sh}^2 t)^{-\frac{1}{2}} \times -3\,\mathrm{ch}(t)$$

soit : $\gamma(t) = (9+13\,\mathrm{sh}^2 t)^{-\frac{1}{2}}\left(\dfrac{26\,\mathrm{sh}^2(t)}{3(9+13\,\mathrm{sh}^2 t)} - \dfrac{2}{3}\right) = (9+13\,\mathrm{sh}^2 t)^{-\frac{1}{2}}\left(\dfrac{26\,\mathrm{sh}^2 t - 2(9+13\,\mathrm{sh}^2 t)}{3(9+13\,\mathrm{sh}^2 t)}\right) = \dfrac{-6}{(9+13\,\mathrm{sh}^2 t)^{\frac{3}{2}}}$

et donc le rayon de courbure est $R(t) = \dfrac{1}{\gamma(t)} = -\dfrac{1}{6}(9+13\,\mathrm{sh}^2 t)^{\frac{3}{2}}$

4. Déterminer enfin la développée de Γ.

La développée de Γ est le lieu des centres $C(t)$ de courbure où $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + R(t)\vec{N}(t)$ aussi

$$\overrightarrow{OC}(t) = \begin{pmatrix} 2\,\mathrm{ch}\,t \\ 3\,\mathrm{sh}\,t \end{pmatrix} - \frac{1}{6}(9+13\,\mathrm{sh}^2 t)^{\frac{3}{2}} \times \frac{1}{\sqrt{9+13\,\mathrm{sh}^2 t}} \begin{pmatrix} -3\,\mathrm{ch}\,t \\ 2\,\mathrm{sh}\,t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,\mathrm{ch}\,t \\ 3\,\mathrm{sh}\,t \end{pmatrix} - \frac{1}{6}(9+13\,\mathrm{sh}^2 t)\begin{pmatrix} -3\,\mathrm{ch}\,t \\ 2\,\mathrm{sh}\,t \end{pmatrix}$$

soit : $\overrightarrow{OC}(t) = \begin{pmatrix} 2\,\mathrm{ch}\,t + \frac{1}{2}(13\,\mathrm{ch}^2 t - 4)\,\mathrm{ch}\,t \\ 3\,\mathrm{sh}\,t - 3\,\mathrm{sh}\,t - \frac{13}{3}\mathrm{sh}^3 t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{2}\mathrm{ch}^3 t \\ -\frac{13}{3}\mathrm{sh}^3 t \end{pmatrix}$

EXERCICE N° 6 On cherche la développée de la cycloïde paramétrée par $f(t) = \begin{pmatrix} t - \sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix}$, $t \in]0, \pi[$

1. On note $\vec{T}$ le premier vecteur de Frenet. Montrer que $\vec{T} = \begin{pmatrix} \sin\frac{t}{2} \\ \cos\frac{t}{2} \end{pmatrix}$

f est C^∞ sur $]0, \pi[$ (au vu des symétries, on limite l'étude à $t \in [0, \pi]$).

On commence par rechercher le repère de Frénet: $f'(t) = \begin{pmatrix} 1 - \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ aussi

$s'(t) = \|f'(t)\| = \sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t} = \sqrt{2 - 2\cos t} = \sqrt{2 - 2(1 - 2\sin^2\frac{t}{2})} = 2\left|\sin\frac{t}{2}\right| = 2\sin\frac{t}{2}$ car $\frac{t}{2} \in]0, \frac{\pi}{2}[\Rightarrow \sin\frac{t}{2} > 0$

Ainsi: $\vec{T} = \dfrac{1}{2\sin\frac{t}{2}}\begin{pmatrix} 1 - \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2\sin\frac{t}{2}}\begin{pmatrix} 1 - (1 - 2\sin^2\frac{t}{2}) \\ 2\cos\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\frac{t}{2} \\ \cos\frac{t}{2} \end{pmatrix}$

2. Déterminer alors le rayon de courbure.

On a: $\vec{T} = \begin{pmatrix} \sin\frac{t}{2} \\ \cos\frac{t}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}\right) \end{pmatrix}$ de sorte que $\alpha(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}$ est un relèvement de $\vec{T}$

On sait alors que: $\gamma = \dfrac{d\alpha}{ds} = \dfrac{\alpha'(t)}{s'(t)} = \dfrac{-\frac{1}{2}}{2\sin\frac{t}{2}} = -\dfrac{1}{4\sin\frac{t}{2}}$. Comme $\gamma \neq 0$, la courbe est bi-régulière et $\boxed{-4\sin\frac{t}{2} = R}$

OU BIEN:

Avec les formules de Frenet, on obtient le rayon de courbure: $\dfrac{d\vec{T}}{ds} = \dfrac{1}{s'(t)}\dfrac{d\vec{T}}{dt} = \gamma\vec{N}$ où $\vec{N} = \begin{pmatrix} -\cos\frac{t}{2} \\ \sin\frac{t}{2} \end{pmatrix}$

On compare les abscisses: $\dfrac{1}{2\sin\frac{t}{2}} \times \dfrac{1}{2}\cos\dfrac{t}{2} = \gamma \times -\cos\frac{t}{2}$ d'où $\gamma = \dfrac{-1}{4\sin\frac{t}{2}} \Leftrightarrow R = \dfrac{1}{\gamma} = \boxed{-4\sin\frac{t}{2} = R}$

3. Déterminer la développée

La développée Γ_D de Γ est le lieu des centres de courbure: $\Gamma_D = \left\{C \mid \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + R\vec{N} \text{ avec } M \in \Gamma\right\}$

Or $\vec{N} = \begin{pmatrix} -\cos\frac{t}{2} \\ \sin\frac{t}{2} \end{pmatrix}$ et $R = -4\sin\frac{t}{2}$ d'où $\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} t - \sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix} - 4\sin\frac{t}{2}\begin{pmatrix} -\cos\frac{t}{2} \\ \sin\frac{t}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t - \sin t + 2\sin t \\ 1 - \cos t - 4\sin^2\frac{t}{2} \end{pmatrix}$

soit $\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} t + \sin t \\ 1 - \cos t - 2(1 - \cos t) \end{pmatrix}$ de sorte que la développée est la courbe $\boxed{\Gamma_D : \begin{cases} X(t) = t + \sin t \\ Y(t) = \cos t - 1 \end{cases}, t \in]0, \pi[}$

4. Retrouver la développée sans utiliser le rayon de courbure.

On utilise la caractérisation de la développée Γ_D comme l'enveloppe des normales à la courbe. C'est donc l'enveloppe des droites $\left(\mathscr{D}_t = M(t) + \mathrm{Vect}(\vec{n}(t))\right)_{t \in]0,\pi[}$ où $\overrightarrow{OM(t)} = f(t)$ et $\vec{n} = \begin{pmatrix} -\sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix}$.

Par définition d'une enveloppe, si C est le point courant de Γ_D, alors $\mathscr{D}_t$ est la tangente à Γ_D en C aussi

1) $C \in D_t \Leftrightarrow \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \lambda(t)\vec{n}(t)$ où $\lambda(t) \in \mathbb{R}$

2) $\dfrac{d\overrightarrow{OC}}{dt}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires: $\det\left(\frac{d\overrightarrow{OC}}{dt}, \vec{n}\right) = 0 \Leftrightarrow \det\left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}, \vec{n}\right) + \lambda'(t)\underbrace{\det(\vec{n}(t), \vec{n}(t))}_{=0} + \lambda(t)\det(\vec{n}'(t), \vec{n}(t)) = 0$

Or: $\det(\vec{n}, \vec{n}') = \begin{vmatrix} -\sin t & -\cos t \\ 1 - \cos t & \sin t \end{vmatrix} = -\sin^2 t + \cos t(1 - \cos t) = \cos t - 1 \neq 0$ si $t \in]0, \pi[$

Aussi: $\lambda(t) = \dfrac{\det(M'(t), \vec{n})}{\det(\vec{n}, \vec{n}')} = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 - \cos t & -\sin t \\ \sin t & 1 - \cos t \end{vmatrix}}{\cos t - 1} = \dfrac{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t}{\cos t - 1} = \dfrac{2 - 2\cos t}{\cos t - 1} = -2$

La développée est ainsi paramétrée par g où $g(t) = \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t - \sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -\sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} t + \sin t \\ \cos t - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} = g(t)}$

5. En utilisant un changement de paramétrage, montrer que cette développée est encore une cycloïde.

On remarque que: $X(t + \pi) = t + \pi + \sin(t + \pi) = \pi + x(t)$ et $Y(t + \pi) = -\cos t - 1 = -2 + 1 - \cos t = -2 + y(t)$.

Ainsi: $\begin{pmatrix} X(t+\pi) - x(t) \\ Y(t+\pi) - y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi \\ -2 \end{pmatrix}$ donc: $\overrightarrow{M(t)C(t+\pi)} = \vec{u}$ et le point $C(t + \pi)$ de la développée est obtenu à partir du point $M(t)$ en appliquant une translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} \pi \\ -2 \end{pmatrix}$.

La développée Γ_D est donc l'image par une translation de la cycloïde: c'est donc encore une cycloïde.

EXERCICE N° 7 On considère la courbe paramétrée $\Gamma : \begin{cases} x = 2t^3+3t^2 \\ y = 3t^2+6t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ dans un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan.

1. Déterminer l'unique réel a solution de $\operatorname{sh} x = -1$ dans $\mathbb{R}$. Calculer alors $\int_{-1}^{0} \sqrt{1+t^2}\mathrm{d}t$ en posant $t = \operatorname{sh}(u)$

La fonction sh réalise un bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (car elle est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $\operatorname{sh}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$)
L'équation $\operatorname{sh}(x) = -1$ a donc une unique solution :

$\operatorname{sh}(x) = -1 \Leftrightarrow \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = -1 \Leftrightarrow e^x - \dfrac{1}{e^x} = -2 \Leftrightarrow_{e^x \neq 0} (e^x)^2 - 1 + 2(e^x) = 0 \Leftrightarrow X = e^x$ solution $X^2 + 2X - 1 = 0$

Le discriminant est $\Delta = 4+4 = 8 = (2\sqrt{2})^2$ aussi il y a deux racines $\dfrac{-2-2\sqrt{2}}{2} = -1-\sqrt{2} < 0$ et $-1+\sqrt{2}$

$\operatorname{sh} x = -1 \Leftrightarrow e^x = -1-\sqrt{2}$ ou $e^x = -1+\sqrt{2}$ or la première équation n'a pas de solution aussi :
$\operatorname{sh} x = -1 \Leftrightarrow e^x = -1+\sqrt{2} \Leftrightarrow x = \ln(-1+\sqrt{2}) = a$

$[t \mapsto \sqrt{1+t^2}]$ est continue sur $[-1,0]$ et on réalise le changement de variables

$$u = \operatorname{sh} t \quad \text{alors} \quad du = (\operatorname{ch} t)dt \quad \text{et} \quad t \begin{vmatrix} 0 \\ -1 \end{vmatrix} \Leftrightarrow u \begin{vmatrix} 0 \\ a \end{vmatrix} \quad \text{car sh}\, u = 0 \Leftrightarrow u = 0 \text{ et sh}\, u = -1 \Leftrightarrow u = a$$

$\int_{-1}^{0} \sqrt{1+t^2}\mathrm{d}t = \int_a^0 \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 u}(\operatorname{ch} u)\mathrm{d}u =_{\text{car } \operatorname{ch}^2 u - \operatorname{sh}^2 u = 1} \int_a^0 \sqrt{\operatorname{ch}^2 u}(\operatorname{ch} u)\mathrm{d}u = \int_a^0 |\operatorname{ch} u|(\operatorname{ch} u)\mathrm{d}u$
Puisque $\operatorname{ch} u > 0$ alors :

$\int_{-1}^{0} \sqrt{1+t^2}\mathrm{d}t = \int_a^0 (\operatorname{ch} u)^2\mathrm{d}u = \dfrac{1}{4}\int_a^0 (e^u + e^{-u})^2\mathrm{d}u = \dfrac{1}{4}\int_a^0 (e^{2u} + 2 + e^{-2u})\mathrm{d}u = \dfrac{1}{4}\left[\dfrac{e^{2u}}{2} + 2u - \dfrac{e^{-2u}}{2}\right]_a^0$

Or : $e^{2a} = e^{2\ln(-1+\sqrt{2})} = (-1+\sqrt{2})^2$ et $e^{-2a} = \dfrac{1}{(-1+\sqrt{2})^2} = \dfrac{(1+\sqrt{2})^2}{(2-1)^2} = (1+\sqrt{2})^2$ aussi

$\int_{-1}^{0} \sqrt{1+t^2}\mathrm{d}t = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{2} + 0 - \dfrac{1}{2} - \dfrac{(-1+\sqrt{2})^2}{2} - 2a + \dfrac{(1+\sqrt{2})^2}{2}\right) = -\dfrac{a}{2} + \dfrac{1}{8}(\sqrt{2}+1-1+\sqrt{2})(\sqrt{2}+1+1-\sqrt{2})$

Finalement : $\boxed{\int_{-1}^{0} \sqrt{1+t^2}\mathrm{d}t = -\dfrac{1}{2}\ln(-1+\sqrt{2}) + \dfrac{\sqrt{2}}{2}}$

2. Calculer la longueur ℓ de la portion de courbe entre A et O où A est le point de rebroussement de la courbe.

On pose : $x(t) = 2t^3+3t^2$ et $y(t) = 3t^2+6t$ où x et y sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
Commençons par chercher le paramètre du point A : c'est un point de rebroussement donc il est forcément stationnaire.

$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 6t^2+6t = 0 \\ 6t+6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6t(t+1) = 0 \\ 6(t+1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = -1$

Aussi : $\ell = \int_{-1}^{0} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\mathrm{d}t = \int_{-1}^{0} \sqrt{6^2t^2(t+1)^2 + 6^2(t+1)^2}\mathrm{d}t = \int_{-1}^{0} 6|t+1|\sqrt{t^2+1}\mathrm{d}t$ mais $t+1 \geqslant 0$ si $t \in [-1,0]$

d'où : $\ell = \int_{-1}^{0} 6(t+1)\sqrt{1+t^2}\mathrm{d}t = 3\int_{-1}^{2} (2t) \times (1+t^2)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}t + 6\int_{-1}^{0} \sqrt{1+t^2}\mathrm{d}t$

$\ell = 3\left[\dfrac{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_{-1}^{0} + 6\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{1}{2}\ln(-1+\sqrt{2})\right) = 2 - 2\times 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 3\ln(-1+\sqrt{2}) = \boxed{2 - \sqrt{2} - 3\ln(-1+\sqrt{2}) = \ell}$

3. Si $M(t)$ le point de paramètre $t \neq -1$ de la courbe Γ, justifier que $\vec{n}(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ t \end{pmatrix}$ dirige la normale en $M(t)$ à Γ.

On a $\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \begin{pmatrix} 6t(t+1) \\ 6(t+1) \end{pmatrix} = 6(t+1)\begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ si $t \neq -1$ donc $M(t)$ est régulier et ce vecteur dirige la tangente en $M(t)$ à Γ. Le vecteur $\vec{t}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$ qui lui est colinéaire dirige lui aussi la tangente et donc $\vec{n}(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ t \end{pmatrix}$ qui est orthogonal à $\vec{t}(t)$ dirige bien la normale en $M(t)$ à Γ

4. Déterminer l'enveloppe des droites $\Delta_t = M(t) + \operatorname{Vect}(\vec{n}(t))$ où $t \in \mathbb{R} - \{-1\}$.
Que représente cette enveloppe pour la courbe Γ ?

On détermine cet enveloppe $\mathscr{E}$ à l'aide d'un paramétrage $[t \mapsto \overrightarrow{OP}(t)]$ régulier de classe C^1 de sorte que :
- le point $P(t)$ est situé sur Δ_t donc $\overrightarrow{OP}(t) = \overrightarrow{OM}(t) + \lambda(t)\vec{n}(t)$ où λ est C^1 sur $\mathbb{R} - \{-1\}$
- la tangente en $P(t)$ à $\mathscr{E}$ est la droite Δ_t donc elle est dirigée par $\vec{n}(t)$ et par suite $\dfrac{d\overrightarrow{OP}}{dt}$ et $\vec{n}(t)$ sont colinéaires

$\det\left(dfrac d\overrightarrow{OP}dt, \vec{n}(t)\right) = 0 \Leftrightarrow \det\left(\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}, \vec{n}(t)\right) + \lambda'(t)\underbrace{\det(\vec{n}(t), \vec{n}(t))}_{=0} + \lambda(t)\det(\vec{n}'(t), \vec{n}(t)) = 0$

Or : $\det(\vec{n}'(t), \vec{n}(t)) = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & t \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ donc $\lambda(t) = -\det\left(\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}, \vec{n}(t)\right) = \begin{vmatrix} 6t(t+1) & -1 \\ 6(t+1) & t \end{vmatrix} = 6(t+1)(t^2+1)$

Ainsi, l'enveloppe a pour paramétrage $\left[t \mapsto \begin{pmatrix} 2t^3+3t^2 \\ 3t^2+6t \end{pmatrix} + 6(t+1)(t^2+1)\begin{pmatrix} -1 \\ t \end{pmatrix}\right]$

On sait que l'enveloppe des normales à la courbe est la développée de la courbe càd le lieu des centres de courbures de la courbe.

EXERCICE N° 4 Quelle est la longueur de la courbe représentative de la fonction exp pour $x \in [0, \ln 2]$?
Poser $u = \sqrt{1+e^{2t}}$

La courbe est paramétrée par $\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = e^t \end{cases}$, $t \in [0, \ln 2]$.

x et y sont C^1 sur $[0, \ln 2]$ et la courbe est régulière ($x'(t) = 1 \neq 0$) aussi

$L = \int_0^{\ln 2} \sqrt{1+e^{2t}}\mathrm{d}t$ On pose $u = \sqrt{1+e^{2t}}$ $du = \dfrac{2e^{2t}}{2\sqrt{1+e^{2t}}}\mathrm{d}t$ $\quad t \begin{vmatrix} 0 \\ \ln 2 \end{vmatrix} \quad u \begin{vmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{5} \end{vmatrix}$

$L = \int_0^{\ln 2} \dfrac{1+e^{2t}}{e^{2t}} \times \dfrac{e^{2t}}{\sqrt{1+e^{2t}}}\mathrm{d}t = \int_0^{\ln 2} f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$ où $\left[f : u \mapsto \dfrac{u^2}{u^2-1}\right]$

(Hypothèse du changement de variable: $[\varphi : t \mapsto \sqrt{1+e^{2t}}]$ est C^1 sur $[0, \ln 2]$ et f est C^0 sur $[\sqrt{2}, \sqrt{5}] \subset]1, +\infty[$

Alors: $L = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} \dfrac{u^2}{u^2-1}du = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} \dfrac{u^2-1+1}{u^2-1}du = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} \left(1 + \dfrac{1}{u^2-1}\right)du$

donc: $L = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} \left(1 + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{u-1} - \dfrac{1}{u+1}\right)\right)du = \left[u + \dfrac{1}{2}(\ln|u-1| - \ln|u+1|)\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} = \sqrt{5} - \sqrt{2} + \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1} - \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$

Soit: $\boxed{L = \sqrt{5} - \sqrt{2} + \ln(\sqrt{5}-1) - \ln 2 - \ln(\sqrt{2}-1)}$