

EXERCICE N° 5 Étudier suivant les valeurs du paramètre réel a la nature de la série $\sum u_n$ où $u_n = \left(n \operatorname{sh} \frac{1}{n}\right)^{-n^a}$

On pourra chercher un équivalent de $\ln u_n$ en partant d'un DL_3 de $\operatorname{sh} x$

Tout d'abord : $u_n = \exp\left(-n^a \ln\left(n \operatorname{sh} \frac{1}{n}\right)\right)$. On commence alors par chercher un équivalent de $v_n = \ln u_n$:

$$v_n = \ln u_n = -n^a \ln\left(n \operatorname{sh} \frac{1}{n}\right) = -n^a \ln\left(n\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\right) = -n^a \ln\left(1 + \frac{1}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = -n^a \left(\frac{1}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

$$\text{Ainsi : } v_n = \ln u_n = -\frac{1}{6n^{2-a}} + o\left(\frac{1}{n^{2-a}}\right) \sim -\frac{1}{6n^{2-a}}$$

- Si $2 - a > 0 \Leftrightarrow a < 2$ alors $\ln u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \Rightarrow u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ et il y a divergence grossière
- Si $2 - a = 0$ alors $\ln u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{6} \Rightarrow u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-\frac{1}{6}} \neq 0$ et il y a divergence grossière
- Si $2 - a < 0 \Leftrightarrow a > 2$ alors $\ln u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty \Rightarrow u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ pas de divergence grossière.

On cherche à utiliser une règle du o en comparant u_n à une série de Riemann :

$$\text{Pour } \alpha \in \mathbb{R} \text{ quelconque : } n^\alpha u_n = e^{\alpha \ln n} e^{\ln u_n} = \exp(\alpha \ln n + \ln u_n) = \exp\left(\alpha \ln n - \frac{1}{6n^{2-a}} + o\left(\frac{1}{n^{2-a}}\right)\right)$$

$$\text{Or : } n^{2-a} \times \alpha \ln n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \Rightarrow \alpha \ln n = o\left(\frac{1}{n^{2-a}}\right) \text{ et ainsi}$$

$$\alpha \ln n - \frac{1}{6n^{2-a}} + o\left(\frac{1}{n^{2-a}}\right) = -\frac{1}{6n^{2-a}} + o\left(\frac{1}{n^{2-a}}\right) \sim -\frac{1}{6n^{2-a}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty \Rightarrow n^\alpha u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\text{autrement dit } u_n = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \text{ pour tout } \alpha \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Pour } \alpha > 1 \text{ (par exemple } \alpha = 2), \sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge donc } \sum u_n \text{ converge absolument par la règle du } o \text{ car } \begin{cases} |u_n| = u_n = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \\ \sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge} \end{cases}$$

EXERCICE N° 7 Étudier la nature de la série $\sum u_n$ où $u_n = \ln\left(\frac{2n + (-1)^n}{2n}\right)$

On a : $u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{2n}\right) \sim \frac{(-1)^n}{2n}$ aussi $|u_n| \sim \frac{1}{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ On peut donc éliminer la divergence grossière et aussi la convergence absolue puisque la série $\sum \frac{1}{2n}$ est de Riemann avec $\alpha = 1 \leq 1$

Attention! Même si la série $\sum \frac{(-1)^n}{2n}$ converge par application du théorème des séries alternées (car $a_n = \frac{1}{2n}$ tend clairement vers 0 en décroissant), on ne peut pas conclure sur la nature de $\sum u_n$ par le critère d'équivalence (Il manque l'hypothèse de signe!)

$$\text{On sait que : } \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \text{ aussi } u_n = \underbrace{\frac{(-1)^n}{2n}}_{=v_n} - \underbrace{\frac{1}{2} \times \frac{1}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}_{=w_n} \text{ soit } u_n = v_n + w_n$$

On sait que la série $\sum v_n$ converge par le théorème des séries alternées puisque $v_n = (-1)^n a_n$ avec $a_n = \frac{1}{2n}$ qui tend clairement vers 0 en décroissant.

On sait aussi que $w_n = -\frac{1}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim -\frac{1}{8n^2}$ or $\left(-\frac{1}{8n^2}\right)$ est une série de Riemann qui converge absolument ($\alpha = 2 > 1$) donc la série $\sum w_n$ converge absolument.

Finalement, la série $\sum u_n$ converge car c'est la somme de deux séries convergentes.

Pour tout entier $n \geq 2$, on pose $u_n = \frac{1}{n \ln n}$

1. On introduit $f = \left[t \mapsto \frac{1}{t \ln t} \right]$. Justifier que, pour $n \geq 2$: $f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(t) dt \leq f(n)$

La fonction $g = [t \mapsto t \ln t]$ est croissante sur $]1, +\infty[$ car $g'(t) = \ln t + 1 > 0$ donc f est décroissante sur $]1, +\infty[$.
Dés lors, pour $n \geq 2$: $n \leq t \leq n+1 \Rightarrow f(n) \geq f(t) \geq f(n+1)$ et alors, par croissance de l'intégrale

$$\underbrace{\int_n^{n+1} f(n) dt}_{=f(n)} \geq \int_n^{n+1} f(t) dt \geq \underbrace{\int_n^{n+1} f(n+1) dt}_{=f(n+1)} \Leftrightarrow \boxed{f(n) \geq \int_n^{n+1} f(t) dt \geq f(n+1)}$$

2. En déduire une minoration de la somme partielle d'ordre n de la série $\sum_{n \geq 2} u_n$ par le réel $\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln 2)$.

On sait que : $\forall k \geq 2, \int_k^{k+1} f(t) dt \leq f(k)$ et notons $S_n = \sum_{k=2}^n f(k)$ la somme partielle de la série.

Sommons cette inégalité pour les entiers $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$: $\sum_{k=2}^n \int_k^{k+1} f(t) dt \leq S_n \Leftrightarrow \int_2^{n+1} f(t) dt \leq S_n$ avec la relation de Chasles

Or, si $u(t) = \ln t$: $\int_2^{n+1} f(t) dt = \int_2^{n+1} \frac{u'(t)}{u(t)} dt = \left[\ln |u(t)| \right]_2^{n+1} = \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln 2)$

On a donc bien obtenu que : $\forall n \geq 2, S_n = \sum_{k=2}^n u_k \geq \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln 2)$

3. Quelle est la nature de la série $\sum_{n \geq 2} u_n$?

Si $(S_n)_{n \geq 2}$ est la suite des sommes partielles de la série, on a, par minoration :

$$\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln 2) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \Rightarrow S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

Puisque la suite des sommes partielles diverge, on peut conclure que la série diverge.

4. On considère maintenant la suite (a_n) avec $a_n = \sum_{k=2}^n u_k - \ln(\ln n)$.

- a. Démontrer que : $\forall n \geq 2, f(n+1) - f(n) \leq a_{n+1} - a_n \leq 0$ On pourra réutiliser la question 1

$$a_{n+1} - a_n = \sum_{k=2}^{n+1} u_k - \sum_{k=2}^n u_k - \ln(\ln(n+1)) + \ln(\ln n) = f(n+1) - \ln(\ln(n+1)) + \ln(\ln n) \quad \text{car } \sum_{k=2}^{n+1} u_k - \sum_{k=2}^n u_k = u_{n+1} = f(n+1)$$

Or : $\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln n) = \int_n^{n+1} f(t) dt$ autrement dit $a_{n+1} - a_n = u_{n+1} - \int_n^{n+1} f(t) dt$

Mais, d'après 1., on a : $f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(t) dt \leq f(n) \Leftrightarrow 0 \leq \int_n^{n+1} f(t) dt - f(n+1) \leq f(n) - f(n+1)$

Ainsi, on a obtenu : $0 \leq a_n - a_{n+1} \leq f(n) - f(n+1) \Leftrightarrow \boxed{0 \geq a_{n+1} - a_n \geq f(n+1) - f(n)}$

- b. Quelle est la nature de la série $\sum_{n \geq 2} (f(n+1) - f(n))$?

La série $\sum_{n \geq 2} (f(n+1) - f(n))$ est télescopique donc elle a la même nature que la suite $(f(n))_{n \geq 2}$

Or : $f(n) = \frac{1}{n \ln n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc la série $\sum_{n \geq 2} (f(n+1) - f(n))$ converge

- c. Justifier alors que la suite $(a_n)_{n \geq 2}$ converge

On peut utiliser le théorème d'encadrement pour les séries à termes de signe constants :

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \geq a_{n+1} - a_n \geq f(n+1) - f(n) \text{ (question 4a)} \\ \sum_{n \geq 2} (f(n+1) - f(n)) \text{ converge (question 4b)} \end{array} \right\} \Rightarrow \sum_{n \geq 2} (a_{n+1} - a_n) \text{ converge}$$

Or, la série télescopique $\sum_{n \geq 2} (a_{n+1} - a_n)$ a la même nature que la suite $(a_n)_{n \geq 2}$ donc la suite $(a_n)_{n \geq 2}$ converge

- d. En déduire que $\sum_{k=2}^n u_k \sim_{n \rightarrow +\infty} \ln(\ln n)$

On a : $\sum_{k=2}^n u_k = \ln(\ln n) + a_n$ où $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \in \mathbb{R}$ (question 4c) aussi $a_n = o(\ln(\ln n))$

mais alors : $\sum_{k=2}^n u_k = \ln(\ln n) + o(\ln(\ln n)) \Leftrightarrow \boxed{\sum_{k=2}^n u_k \sim_{n \rightarrow +\infty} \ln(\ln n)}$