

EXERCICE N° 7 Montrer que l'équation $t^2 y'' + 4ty' + 2y = e^t$ admet une unique solution développable en série entière au voisinage de 0 qu'on déterminera.

On cherche une solution de la forme $y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ où $\sum a_n t^n$ est une SE de rayon de convergence $R > 0$

Par dérivation terme à terme, on a, sur $] -R, R[$: $y'(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n t^{n-1}$ et $y''(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n t^{n-2}$

$$t^2 y''(t) + 4ty'(t) + 2y(t) = e^t \Leftrightarrow t^2 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n t^{n-2} \right) + 4t \left(\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n t^{n-1} \right) + 2 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n t^n + \sum_{n=0}^{+\infty} 4n a_n t^n + \sum_{n=0}^{+\infty} 2a_n t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!}$$

$$t^2 y''(t) + 4ty'(t) + 2y(t) = e^t \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{(n(n-1) + 4n + 2)}_{=n^2+3n+2} a_n t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!}$$

• On identifie alors les coefficients à cause de l'unicité du DSE :

$$t^2 y''(t) + 4ty'(t) + 2y(t) = e^t \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \underbrace{(n^2 + 3n + 2)}_{(n+1)(n+2)} a_n = \frac{1}{n!} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{1}{(n+2)!}$$

• On vérifie que le rayon de convergence R est > 0 :

$$\frac{|a_{n+1} t^{n+1}|}{|a_n t^n|} = \frac{|t|}{(n+3)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ donc la série CVA pour tout } t \in \mathbb{R} \text{ et } R = +\infty$$

• On explicite $y(t)$ à l'aide des fonctions usuelles : $\forall t \in \mathbb{R}, y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{(n+2)!}$

Pour $t \neq 0$: $t^2 y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{n+2}}{(n+2)!} = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} = e^t - 1 - t$ soit $y(t) = \frac{e^t - 1 - t}{t^2}$ si $t \neq 0$ et $y(0) = \frac{1}{2}$

En utilisant une équation différentielle au 2nd ordre vérifiée par f ,
déterminer le développement en série entière en 0 de $f = [x \mapsto \text{sh}(\text{Arcsin } x)]$

• Par composition, f est C^∞ sur $] -1, 1[$ et on a: $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ch}(\text{Arcsin } x)$

puis $f''(x) = -\frac{1}{2} \times -2x \times (1-x^2)^{-\frac{3}{2}} \text{ch}(\text{Arcsin } x) + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \times \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{sh}(\text{Arcsin } x) = \frac{x}{1-x^2} f'(x) + \frac{1}{1-x^2} f(x)$

Ainsi, f est solution sur $] -1, 1[$ du problème de Cauchy

$$(1-x^2)y'' - xy' - y = 0 \quad (\text{E}) \quad \text{et} \quad \begin{cases} y(0) = f(0) = \text{sh } 0 = 0 \\ y'(0) = f'(0) = 1 \times \text{ch}(0) = 1 \end{cases}$$

Ce problème admet une unique solution aussi, si on trouve une solution développable en série entière, on pourra l'identifier à f et prouver par conséquent que f est développable en série entière.

• On cherche donc les solutions de (E) développable en série entière sous la forme:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ avec un rayon de convergence } R \geq 1$$

$$(1-x^2)y''(x) - xy'(x) - y(x) = 0 \Leftrightarrow (1-x^2) \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0$$

On pose $k = n-2$ dans la première somme et $k = n$ dans les suivantes

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)(k+2)a_{k+2}x^k - \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)a_k x^k - \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k x^k - \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k = 0$$

On remarque qu'on peut faire démarrer toutes les sommes à 0 en ajoutant des coefficients nuls

Toutes les sommes sont convergentes donc par linéarité.

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} ((k+1)(k+2)a_{k+2} - k(k-1)a_k - k a_k - a_k) x^k = 0$$

de sorte que par unicité du développement en série entière

$$\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}, (k+1)(k+2)a_{k+2} - (k(k-1) + k + 1)a_k = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}, a_{k+2} = \frac{k^2 + 1}{(k+1)(k+2)} a_k \quad (*)$$

De plus, les conditions initiales donnent: $y(0) = a_0 = 0$ et $y'(0) = a_1 = 1$. Rappel: $a_n = \frac{y^{(n)}(0)}{n!}$

Mais $a_0 = 0$ entraîne par une récurrence immédiate: $\forall n \in \mathbb{N}, a_{2n} = 0$ et la suite $(a_{2n+1})_{n \geq 0}$ est totalement déterminée avec:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, a_{2n+3} = \frac{(2n+1)^2 + 1}{(2n+2)(2n+3)} a_{2n+1} \end{cases} \quad ((*) \text{ avec } k = 2n+1 \text{ avec } a_{2n+1} > 0 \text{ (récurrence immédiate)})$$

• On doit vérifier que le rayon de convergence $R \geq 1$ avec la règle d'Alembert:

$$\text{si } x \neq 0: \frac{|a_{2n+3}x^{2n+3}|}{|a_{2n+1}x^{2n+1}|} = \frac{(2n+1)^2 + 1}{(2n+2)(2n+3)} |x|^2 \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2n)^2}{(2n)^2} |x|^2 = |x|^2$$

Si $|x| < 1$, la série converge absolument et donc $R \geq 1$

(Remarque: on peut montrer que $R = 1$ mais ça n'est pas nécessaire pour terminer l'exercice)

• Enfin, on peut préciser le coefficient a_{2n+1} :

$$\begin{aligned} a_{2n+1} &= \frac{(2n-1)^2 + 1}{2n(2n+1)} a_{2n-1} \quad \text{en utilisant } (*) \text{ pour } k = 2n-1 \\ &= \frac{(2n-1)^2 + 1}{(2n+1)(2n)} \times \frac{(2n-3)^2 + 1}{(2n-1)(2n-2)} a_{2n-3} \quad \text{en utilisant } (*) \text{ pour } k = 2n-3 \\ &= \dots \end{aligned}$$

$$= \frac{((2n-1)^2 + 1)((2n-3)^2 + 1) \dots (1^2 + 1)}{(2n+1)(2n) \times (2n-1)(2n-2) \times \dots \times 3 \times 2} a_1 = \frac{\prod_{p=1}^n ((2p-1)^2 + 1)}{(2n+1)!}$$

On considère la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ où : $\begin{cases} a_0 = a_1 = 1 \\ \forall n \geq 0, a_{n+2} = a_{n+1} + \frac{a_n}{n+2} \end{cases}$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $1 \leq a_n \leq n+2$ et en déduire le rayon de convergence R

Par récurrence double avec $HR_n : 1 \leq a_n \leq n+2$

Initialisation: $1 \leq a_0 \leq 0+2$ et $1 \leq a_1 \leq 1+2$ donc HR_0 et HR_1 sont vraies.

Hérédité: Prouvons $\begin{cases} HR_n \\ HR_{n+1} \end{cases} \Rightarrow HR_{n+2}$

On sait $1 \leq a_n \leq n+2 \Rightarrow \frac{1}{n+2} \leq \frac{a_n}{n+2} \leq 1$ et $1 \leq a_{n+1} \leq n+3$ aussi $1 + \frac{1}{n+2} \leq \underbrace{a_{n+1} + \frac{a_n}{n+2}}_{=a_{n+2}} \leq n+3+1$
Comme $1 + \frac{1}{n+2} \geq 1$, on a bien: $1 \leq a_{n+2} \leq (n+2)+2$ autrement dit HR_{n+2} est vraie.

Conclusion: Par principe de récurrence double, on a bien: $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq a_n \leq n+2$

Par suite: $|x|^n \leq a_n |x|^n \leq (n+2)|x|^n$.

Si $|x| > 1$ alors $|x|^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \Rightarrow |a_n x^n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \Rightarrow \sum a_n x^n$ DVG donc $R \leq 1$.

Par ailleurs, pour $x \neq 0$: $\frac{(n+3)|x|^{n+1}}{(n+2)|x|^n} = \frac{n+3}{n+2}|x| \sim |x| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} |x|$

Aussi, si $|x| < 1$, $\sum (n+2)|x|^n$ CV aussi, par majoration, $\sum a_n x^n$ CVA et donc $R \geq 1$. Finalement: $\boxed{R = 1}$

2. On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+2} x^{n+2}$

- a. Justifier que g est aussi définie sur $] -R, R[$

g est la somme d'une série entière et on note R' son rayon de convergence. En divisant par $n+2$ dans l'inégalité précédente,

on a: $\frac{1}{n+2} \leq \frac{a_n}{n+2} \leq 1$ Alors: $\frac{|x|^{n+2}}{n+2} \leq \frac{a_n}{n+2} |x|^{n+2} \leq |x|^{n+2}$.

Si $|x| > 1$ alors, par croissance comparée: $\frac{|x|^{n+2}}{n+2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \Rightarrow \frac{a_n}{n+2} |x|^{n+2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ soit $\sum \frac{a_n}{n+2} x^{n+2}$ DVG aussi $R' \leq 1$ et, par suite, g est bien définie sur $] -1, 1[$

- b. Établir une relation liant $f(x)$ et $g(x)$ sur $] -R, R[$

On utilise la relation de récurrence: $\forall x \in] -1, 1[, g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_{n+2} - a_{n+1}) x^{n+2} = \sum_{k=2}^{+\infty} a_k x^k - \sum_{k=1}^{+\infty} a_k x^{k+1}$

en scindant les sommes (possible puisque les séries sont convergentes) et en changeant d'indices.

Aussi: $\forall x \in] -1, 1[, g(x) = (f(x) - a_1 x - a_0) - x(f(x) - a_0) = \boxed{f(x) - x f(x) - 1 = g(x)}$

- c. Montrer que g est solution sur $] -R, R[$ d'un problème de Cauchy du premier ordre qu'on déterminera.

g est dérivable sur $] -1, 1[$ et: $g'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+2} \times (n+2) x^{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} = x f(x) = g'(x)$

Mais: $x g(x) = x f(x) - x \times x f(x) - x = g'(x) - x g'(x) - x = (1-x) g'(x) - x$

Par ailleurs: $g(0) = 0$ donc, finalement, $\boxed{g \text{ est solution sur }] -1, 1[\text{ de } \begin{cases} (1-x)y' - xy = x \\ y(0) = 0 \end{cases}}$

- d. Résoudre ce problème de Cauchy et en déduire les expressions de $g(x)$ puis $f(x)$

• $y = [x \mapsto -1]$ est une solution particulière de l'équation différentielle sur $] -1, 1[$.

• On résout l'équation homogène. Sur $] -1, 1[: (1-x)y' = xy \Leftrightarrow y' - \frac{x}{1-x} y = 0$

$a(x) = \frac{-x}{1-x} = \frac{1-x-1}{1-x} = 1 - \frac{1}{1-x} = \left(x + \ln(1-x) \right)'$ donc: $y(x) = C \exp \left(-x - \ln(1-x) \right) = C \frac{e^{-x}}{1-x}$ avec $C \in \mathbb{R}$

• Finalement: $g(x) = C \frac{e^{-x}}{1-x} - 1$ or $g(0) = 0 \Leftrightarrow C - 1 = 0 \Leftrightarrow C = 1$. Ainsi: $\boxed{g(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}}$

puis $f(x) = \frac{g'(x)}{x} = \frac{1}{x} \left(\frac{-e^{-x} \times (1-x) - (-1)e^{-x}}{(1-x)^2} \right) = \boxed{\frac{e^{-x}}{(1-x)^2} = f(x)}$