EXEMPLE N° 8 Dans $\mathbb{R}^4$ où on note $(x,y,z,t)$ les coordonnées dans la base canonique.

1. Identifier géométriquement l'endomorphisme $q$ canoniquement associé à la matrice $Q = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$

D'abord, d'après le sujet, $\underline{q \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)}$ (puisqu'associée à une matrice de $M_4(\mathbb{R})$)
et on vérifie que $Q^2 = Q \Leftrightarrow \underline{q \circ q = q}$ donc $\boxed{q \text{ est un projecteur de } \mathbb{R}^4}$.
On sait que $q$ est le projecteur sur $\mathrm{Im}\, q = \mathrm{Im}\, Q$ parallèlement à $\ker q = \ker Q$ (car matrice canoniquement associée à $q \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$). Précisons l'image et le noyau : on note $C_i$ la colonne $i$ de la matrice Q
$\mathrm{Im}\, q = \mathrm{Im}\, Q = \mathrm{Vect}(C_1, C_2, C_3, C_4) = \mathrm{Vect}(2C_1, C_4)$ avec $(2C_1, C_4)$ libre puisque $C_1 = C_3$ et $C_2 = -C_4$ donc $\mathrm{rg}(q) = 2$
Par le théorème du rang : $\dim\ker q = 4 - 2 = 2$ et les relations $C_1 - C_3 = 0$ et $C_2 + C_4 = 0$ donnent que $(1,0,-1,0)$ et $(0,1,0,1)$ sont dans $\mathrm{Ker}\, q$. Ces vecteurs étant non colinéaires, ils forment une base de $\ker q$
$\boxed{q \text{ est le projecteur sur} \mathrm{Im}\, q = \mathrm{Vect}\big((1,1,1,1),(0,0,0,1)\big) \text{ parallèlement à } \mathrm{Ker}\, q = \mathrm{Vect}\big((1,0,-1,0),(0,1,0,1)\big)}$

On considère le sous-espace vectoriel F donné par les équations $\begin{cases} x - y = 0 \\ x + t = 0 \end{cases}$ et $G = \mathrm{Vect}\big((1,-1,0,0),(0,0,1,1)\big)$

2. Prouver que F et G sont supplémentaires.
Préciser la matrice du projecteur $p$ sur F parallèlement à G dans la base canonique.

$(x,y,z,t) \in F \Leftrightarrow (x,y,z,t) = (x,x,z,-x) = x(1,1,0,-1) + z(0,0,1,0)$ d'où $F = \mathrm{Vect}\big((1,1,0,-1),(0,0,1,0)\big)$
Les familles $\big((1,1,0,-1),(0,0,1,0)\big)$ et $\big((1,-1,0,0),(0,0,1,1)\big)$ sont libres car constituées de 2 vecteurs non colinéaires aussi $\dim F = \dim G = 2$

En outre : $(x,y,z,t) \in F \cap G \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ x + t = 0 \end{cases}$ et $\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ (x,y,z,t) = (a,-a,b,b)$
$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 0 \\ a + b = 0 \end{cases}$ et $\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ (x,y,z,t) = (a,-a,b,b)$
$\Leftrightarrow \quad a = b = 0$ et $(x,y,z,t) = (0,0,0,0)$

Ainsi : $\begin{cases} F \cap G = \{(0,0,0,0)\} \\ \dim F + \dim G = \dim \mathbb{R}^4 \end{cases} \Leftrightarrow F \oplus G = \mathbb{R}^4$ autrement dit F et G sont supplémentaires
On pose : $\varepsilon_1 = (1,1,0,-1)$, $\varepsilon_2 = (0,0,1,0)$, $\varepsilon_3 = (1,-1,0,0)$ et $\varepsilon_4 = (0,0,1,1)$
$\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$ est une base adaptée à $E = F \oplus G$ dans laquelle le projecteur a pour matrice $\Delta = \mathrm{diag}(1,1,0,0)$

On connaît la matrice de passage P entre la base canonique et $\mathcal{B}'$ : $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Par la formule de changement de bases : $\Delta = P^{-1}AP$ où A est la matrice cherchée soit $A = P\Delta P^{-1}$
Calcul de $P^{-1}$ :

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = e_1 + e_2 - e_4 \\ \varepsilon_2 = e_3 \\ \varepsilon_3 = e_1 - e_2 \\ \varepsilon_4 = e_3 + e_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varepsilon_3 + \varepsilon_1 = 2e_1 - e_4 \\ e_3 = \varepsilon_2 \\ e_2 = e_1 - \varepsilon_3 \\ e_4 = -\varepsilon_2 + \varepsilon_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e_1 = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_3 - \varepsilon_2 + \varepsilon_4) \\ e_3 = \varepsilon_2 \\ e_2 = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 + \varepsilon_4) \\ e_4 = -\varepsilon_2 + \varepsilon_4 \end{cases} \text{ soit } P^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

puis, par formule de changement de bases :

$$A = P\Delta P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 1 & -1 \\ -1/2 & -1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

en exploitant la pré-multiplication de $P^{-1}$ par $\Delta$ puis une seconde pré-multiplication (actions sur les lignes)

3. Donner la matrice S dans la base canonique de la symétrie par rapport à F parallèlement à G.

Rappel : si $x = x_F + x_G$, $p(x) = x_F$ et $s(x) = x_F - x_G = 2x_F - (x_F + x_G) = 2p(x) - x$ aussi $\boxed{S = 2A - I_4}$

4. Justifier qu'il existe une matrice inversible P qu'on précisera telle que $P^{-1}SP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = D$

On reconnaît une formule de changement de bases où D est la base adaptée à la symétrie.
La base $\mathcal{B}'$ est adaptée à la symétrie car $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est une base de F et $(\varepsilon_3, \varepsilon_4)$ une base de G.
En utilisant la matrice P de passage entre les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ calculée précédemment, on trouve bien $P^{-1}SP = D$

EXEMPLE N° 7 Soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé $A = \begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

1. Préciser $\mathrm{Im}\,(f)$, $\mathrm{Ker}\,(f)$ et $\mathrm{Ker}\,(f + id)$

Notons $C_j$ la colonne $j$ de A alors $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(C_1, C_2, C_3) = \mathrm{rg}(C_1, C_3) = 2$ car $\begin{cases} C_1 = 2C_2 \\ (C_1, C_3) \text{ libre} \end{cases}$
Aussi : $\dim \mathrm{Im}\,(f) = 2$ et, pour obtenir une base de $\mathrm{Im}\,(f)$, il suffit de trouver 2 vecteurs de $\mathrm{Im}\,(f)$ non colinéaires.
Or, si $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$ : $(-1,0,0) = f(e_1)$ et $(1/2,-1,-1) = f(e_3)$ sont dans $\mathrm{Im}\, f$ et sont non colinéaires de sorte que : $\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Vect}\big((-1,0,0),(1/2,-1,-1)\big) = \boxed{\mathrm{Vect}\big((1,0,0),(1/2,-1,-1)\big) = \mathrm{Im}\,(f)}$
Par le théorème du rang : $\dim\mathrm{Ker}\,(f) = \dim\mathbb{R}^3 - \mathrm{rg}(f) = 3 - 2 = 1$. On cherche donc un vecteur non nul de $\mathrm{Ker}\,(f)$. Mais : $C_1 - 2C_2 = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow A\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \left( \Leftrightarrow f(e_1) - 2f(e_2) = 0_{\mathbb{R}^3} \right) \Leftrightarrow (1,-2,0) \in \mathrm{Ker}\, f$ soit
$\boxed{\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Vect}\big((1,-2,0)\big)}$

Enfin : $\mathrm{Ker}\,(f + id) = \mathrm{Ker}\,(A + I_3) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Il est clair que $\mathrm{rg}(A + I_3) = 1$ (une colonne nulle et les deux autres colonnes sont colinéaires). Par le théorème du rang : $\dim\mathrm{Ker}\,(A + I_3) = \dim\mathbb{R}^3 - \mathrm{rg}(A + I_3) = 3 - 1 = 2$

On remarque que, d'une part la colonne 1 est nulle et la somme des colonne 2 et 3 est nulle soit
$(A + I_3)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (A + I_3)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (1,0,0)$ et $(0,1,1)$ sont dans $\mathrm{Ker}\,(A + I_3)$ et sont non colinéaires.
Ainsi : $\boxed{\mathrm{Ker}\,(f + id) = \mathrm{Vect}\big((1,0,0),(0,1,1)\big)}$

2. Proposer une matrice P de $GL_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

On reconnaît une formule de changement de base :
$A' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est la matrice de $f$ dans une nouvelle base $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de $\mathbb{R}^3$ avec $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$
Par définition, on a donc : $A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}\big(f(\varepsilon_1), f(\varepsilon_2), f(\varepsilon_3)\big)$ de sorte que $f(\varepsilon_3) = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow \varepsilon_3 \in \mathrm{Ker}\,(f)$
et aussi $f(\varepsilon_1) = -\varepsilon_1 \Leftrightarrow \varepsilon_1 \in \mathrm{Ker}\,(f + id)$ et : $f(\varepsilon_2) = -\varepsilon_2 \Leftrightarrow \varepsilon_2 \in \mathrm{Ker}\,(f + id)$
On pose $\varepsilon_1 = (1,0,0)$, $\varepsilon_2 = (0,1,1)$ et $\varepsilon_3 = (1,-2,0)$
On vérifie facilement que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$ : elle est libre (à faire) de cardinal $3 = \dim(\mathbb{R}^3)$
Alors, $\boxed{\text{si } P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ on a bien : } P^{-1}AP = A' \text{ par changement de bases.}}$