

EXERCICE N° 4

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \geq 1$. On dit que

l'endomorphisme f de $\mathcal{L}(E)$ est symétrique lorsque : $\forall (x, y) \in E^2, \langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle$

1. Justifier que, lorsque f est symétrique, alors $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$ sont des supplémentaires orthogonaux.

• On prouve d'abord l'orthogonalité de ses sev autrement dit que : $\forall x \in \text{Ker } f, \forall y \in \text{Im } f, \langle x, y \rangle = 0$
 Or : $y \in \text{Im } f \Leftrightarrow \exists a \in E, y = f(a)$ de sorte que, par symétrie de f : $\langle x, y \rangle = \langle x, f(a) \rangle = \langle f(x), a \rangle = \langle 0_E, a \rangle = 0$
 • Puisqu'ils sont orthogonaux, on sait que ses sev sont en somme directe soit $\text{Ker } f \oplus \text{Im } f \subset E$
 Puisque la somme est directe : $\dim(\text{Ker } f \oplus \text{Im } f) = \dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f = \dim E$ par le théorème du rang
 Ainsi : $\begin{cases} \text{Ker } f \oplus \text{Im } f \subset E \\ \dim(\text{Ker } f \oplus \text{Im } f) = \dim E \end{cases} \Leftrightarrow \text{Ker } f \oplus \text{Im } f = E$

2. Montrer que les sous-espaces propres d'un endomorphisme f symétrique sont deux à deux orthogonaux.

On choisit deux valeurs propres distinctes λ et μ d'un endomorphisme f symétrique de $\mathcal{L}(E)$.
 On note $E_\lambda = \text{Ker}(f - \lambda \text{id})$ et $E_\mu = \text{Ker}(f - \mu \text{id})$ les sev propres associés.
 Il s'agit d'établir que E_λ et E_μ sont orthogonaux soit que : $\forall x \in E_\lambda, \forall x' \in E_\mu, \langle x, x' \rangle = 0$
 Mais : $\langle f(x), x' \rangle = \langle \lambda x, x' \rangle = \lambda \langle x, x' \rangle$ d'une part et $\langle f(x), x' \rangle = \langle x, f(x') \rangle = \langle x, \mu x' \rangle = \mu \langle x, x' \rangle$ d'autre part
 de sorte que : $\lambda \langle x, x' \rangle = \mu \langle x, x' \rangle \Leftrightarrow (\lambda - \mu) \langle x, x' \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle x, x' \rangle = 0$ vu que $\lambda - \mu \neq 0$

EXERCICE N° 5

Dans l'espace $E = \mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$) munit du produit scalaire usuel, on fixe

(e_1, e_2) une famille libre et u_1 et u_2 deux vecteurs non nuls

On définit alors, pour $x \in E$: $f(x) = \langle u_1, x \rangle e_1 + \langle u_2, x \rangle e_2$

1. Montrer que f est un endomorphisme de E

Par construction : $\forall x \in E, f(x) = \underbrace{\langle u_1, x \rangle}_{\in \mathbb{R}} e_1 + \underbrace{\langle u_2, x \rangle}_{\in \mathbb{R}} e_2 \in \text{Vect}(e_1, e_2) \subset E$ donc $f(E) \subset E$ Pour la linéarité : $\forall (x, x') \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}$,
 $f(\lambda x + x') = \langle u_1, \lambda x + x' \rangle e_1 + \langle u_2, \lambda x + x' \rangle e_2 = (\lambda \langle u_1, x \rangle + \langle u_1, x' \rangle) e_1 + (\lambda \langle u_2, x \rangle + \langle u_2, x' \rangle) e_2 = \lambda f(x) + f(x')$
 par linéarité à droite du produit scalaire

2. Montrer que $\text{rg}(f) \leq 2$

On a montré que $\forall x \in E, f(x) \in \text{Vect}(e_1, e_2) \Leftrightarrow \text{Im } f \subset \text{Vect}(e_1, e_2) \Rightarrow \text{rg}(f) \leq \dim \text{Vect}(e_1, e_2) = 2$ car (e_1, e_2) libre

3. Montrer que $\text{Ker } f = \text{Vect}(u_1, u_2)^\perp$

Pour $x \in E$: $x \in \text{Ker } f \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow \langle u_1, x \rangle e_1 + \langle u_2, x \rangle e_2 = 0 \Leftrightarrow \langle u_1, x \rangle = 0 = \langle u_2, x \rangle \Leftrightarrow x \in \text{Vect}(u_1, u_2)^\perp$

4. On suppose que $\langle u_1, e_1 \rangle = \langle u_2, e_2 \rangle = 0$ et $\langle u_1, e_2 \rangle \neq 0, \langle u_2, e_1 \rangle \neq 0$. Montrer que $\text{rg}(f) = 2$

Puisqu'on travaille dans un espace E de dimension finie, le théorème du rang et le résultat sur la dimension d'un orthogonal donne : $\text{rg}(f) = \dim E - \dim \text{Ker } f = \dim \text{Ker } f^\perp = \dim \text{Vect}(u_1, u_2)$ car $\text{Ker } f^\perp = \left(\text{Vect}(u_1, u_2)^\perp \right)^\perp$
 Il s'agit donc de justifier que, sous les hypothèses de cette question, (u_1, u_2) est libre.
 Soit $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$ avec $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 = 0$ alors $\langle \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, e_1 \rangle = 0 = \langle \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, e_2 \rangle$ Mais :
 $\langle \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, e_1 \rangle = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 \times 0 + \alpha_2 \underbrace{\langle u_2, e_1 \rangle}_{\neq 0} = 0 \Leftrightarrow \alpha_2 = 0$ et : $\langle \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, e_2 \rangle = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 \underbrace{\langle u_1, e_2 \rangle}_{\neq 0} + \alpha_2 \times 0 = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = 0$
 Ainsi, puisque (u_1, u_2) est libre, $\dim \text{Vect}(u_1, u_2) = 2 \Leftrightarrow \text{rg}(f) = 2$

5. À quelles conditions f est-il alors diagonalisable ?

Par le théorème du rang, $\dim \text{Ker } f = \dim E - \text{rg } f = n - 2$ donc

0 est valeur propre d'ordre au moins $m(0)$ avec $m(0) \geq \dim E_0(f) = \dim \text{Ker } f = n - 2$

Par ailleurs : $f(e_1) = \underbrace{\langle u_2, e_1 \rangle}_{\neq 0} e_2 \neq 0$ et $f(e_2) = \underbrace{\langle u_1, e_2 \rangle}_{\neq 0} e_1 \neq 0$ donc e_1 et e_2 ne sont pas dans $\text{Ker } f$.

On peut donc construire une base $\mathcal{B}$ de E en réunissant (e_1, e_2) et une base $(e_3, \dots, e_n)$ de $\text{Ker } f$

Dans cette base, la matrice de f est alors $\begin{pmatrix} 0 & \langle u_1, e_2 \rangle & 0 & \dots & 0 \\ \langle u_2, e_1 \rangle & 0 & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ qu'on utilise pour calculer le polynôme caractéristique de f :
 $\chi_f(x) = x^{n-2}(x^2 - \langle u_1, e_2 \rangle \langle u_2, e_1 \rangle)$
 où $\langle u_1, e_2 \rangle \langle u_2, e_1 \rangle \neq 0$

- Si $\langle u_1, e_2 \rangle \langle u_2, e_1 \rangle < 0$ alors χ_f n'est pas scindé dans $\mathbb{R}[X]$ donc f n'est pas diagonalisable
 • Si $\langle u_1, e_2 \rangle \langle u_2, e_1 \rangle > 0$ alors χ_f est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ (1). Il y a 2 racines simples $\pm \sqrt{\langle u_1, e_2 \rangle \langle u_2, e_1 \rangle}$ associés à des sev propres de dimension 1 et la racine 0 de multiplicité $m(0) = n - 2 = \dim \text{Ker } f$ donc, pour chacune des valeurs propres, la dimension de l'espace propre vaut la multiplicité (2). Aussi : (1) et (2) $\Leftrightarrow f$ est diagonalisable.

Finalement, dans ces conditions, f est diagonalisable lorsque $\langle u_1, e_2 \rangle \langle u_2, e_1 \rangle > 0$

1. Montrer que $\langle f, g \rangle = \int_0^1 (f(t)g(t) + f'(t)g'(t))dt$ définit un produit scalaire sur E.

Vérifions que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive

(1) (3) (2) (5) (4)

Pour (1) : Pour f et g dans E, alors f et g sont de classe C^2 sur $[0, 1]$ aussi $fg + f'g'$ est bien une fonction continue sur $[0, 1]$ et donc $\langle f, g \rangle$ existe et c'est un réel.

Pour (2) : on a $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle$ car le produit est commutatif

Pour (3) : Vu (2) vraie, on prouve la linéarité de $[f \mapsto \langle f, g \rangle]$ qui découle de la linéarité de la dérivation et de l'intégrale.

Pour (4) : Pour $f \in E$: $\langle f, f \rangle = \int_0^1 ((f(t))^2 + (f'(t))^2)dt \geq 0$ par positivité de l'intégrale ($f^2 + f'^2 \geq 0$ sur $[0, 1]$).

Pour (5) : Si $\langle f, f \rangle = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 ((f(t))^2 + (f'(t))^2)dt = 0$ Puisque $f^2 + f'^2$ est positive et continue sur $[0, 1]$ alors :
 $f^2 + f'^2 = 0$ sur $[0, 1] \Rightarrow f'^2 = f^2 = 0$ sur $[0, 1] \Rightarrow f = 0$ sur $[0, 1]$
 (somme nulle de termes positifs)

Enfinement : $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit bien un produit scalaire sur E.

2. Déterminer la distance entre la fonction carrée et le sev $\mathbb{R}_1[X]$ dans cet espace euclidien.

où bien sûr on assimile un polynôme à la fonction polynômiale associée.

On pose $x = [t \mapsto t^2]$ et $F = \mathbb{R}_1[X] \simeq \{[t \mapsto at + b] \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}(\underbrace{[t \mapsto 1]}_{=g_0}, \underbrace{[t \mapsto t]}_{=g_1})$

On sait que la distance cherchée vaut $d(x, F) = \|x - \pi(x)\|$ où $\pi(x)$ est la projection orthogonale de x sur F

Méthode n° 1 : On détermine $\pi(x)$ en utilisant la caractérisation : $y = \pi(x) \Leftrightarrow \underbrace{y \in F}_{(1)} \text{ et } \underbrace{x - y \in F^\perp}_{(2)}$

(1) $\Leftrightarrow \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in [0, 1], y = ag_1 + bg_0$ et (2) $\Leftrightarrow \langle x - y, g_0 \rangle = 0 = \langle x - y, g_1 \rangle$ or :

$\langle x - y, g_0 \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle y, g_0 \rangle = \langle x, g_0 \rangle \Leftrightarrow a \langle g_1, g_0 \rangle + b \langle g_0, g_0 \rangle = \langle x, g_0 \rangle \Leftrightarrow \frac{a}{2} + b = \frac{1}{3}$
 $\langle x - y, g_1 \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle y, g_1 \rangle = \langle x, g_1 \rangle \Leftrightarrow a \langle g_1, g_1 \rangle + b \langle g_0, g_1 \rangle = \langle x, g_1 \rangle \Leftrightarrow \frac{4}{3}a + \frac{1}{2}a = \frac{5}{4}$ Aussi :

(2) $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{2} + b = \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3}a + \frac{1}{2}a = \frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{3} - \frac{a}{2} \\ \frac{5}{4}a - \frac{a}{2} = \frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{3} - \frac{a}{2} \\ \frac{15-2}{12}a = \frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6} \\ a = 1 \end{cases}$ Ainsi : $y = \pi(x) = \left[t \mapsto t - \frac{1}{6} \right]$

Calcul final de la distance : $d(x, F) = \|x - \pi(x)\| = \sqrt{\|x\|^2 - \|\pi(x)\|^2}$ où $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = \frac{1}{5} + 4 \times \frac{1}{3} = \frac{23}{15}$
 et $\|\pi(x)\|^2 = \langle \pi(x), \pi(x) \rangle = \langle g_1 - \frac{1}{6}g_0, g_1 - \frac{1}{6}g_0 \rangle = \langle g_1, g_1 \rangle - 2 \times \frac{1}{6} \langle g_1, g_0 \rangle + \frac{1}{36} \langle g_0, g_0 \rangle = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{36} = \frac{48-6+1}{36} = \frac{43}{36}$

Méthode n° 2 : On sait que $\pi(x) = \langle x, \varepsilon_1 \rangle \varepsilon_1 + \langle x, \varepsilon_2 \rangle \varepsilon_2$ où $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est une base orthonormée de $F = \mathbb{R}_1[X]$

On obtient $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ en appliquant l'algorithme de Gram-Schmidt à la base (g_0, g_1) :

• $\varepsilon_1 = \frac{g_0}{\|g_0\|}$ or $\langle g_0, g_0 \rangle = 1$ d'où $\varepsilon_1 = g_0$

• $\varepsilon_2 = \frac{u_1}{\|u_1\|}$ où $u_1 = g_1 - \langle g_1, \varepsilon_1 \rangle \varepsilon_1 = g_1 - \langle g_1, g_0 \rangle g_0 = g_1 - \frac{1}{2}g_0$ puis $\varepsilon_2 = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{13}}(g_1 - \frac{1}{2}g_0)$ car

$\langle u_1, u_1 \rangle = \langle g_1 - \frac{1}{2}g_0, g_1 - \frac{1}{2}g_0 \rangle = \langle g_1, g_1 \rangle - 2 \times \frac{1}{2} \langle g_1, g_0 \rangle + \frac{1}{4} \langle g_0, g_0 \rangle = \frac{4}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{16-6+3}{12} = \frac{13}{12} = \alpha$

on calcule alors la projection orthogonale :

$\pi(x) = \underbrace{\langle x, g_0 \rangle}_{=\frac{1}{3}} g_0 + \underbrace{\frac{12}{13} \langle x, g_1 - \frac{1}{2}g_0 \rangle}_{=1} (g_1 - \frac{1}{2}g_0)$ car : $\langle x, g_1 - \frac{1}{2}g_0 \rangle = \langle x, g_1 \rangle - \frac{1}{2} \langle x, g_0 \rangle = \frac{1}{4} + 1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{15-2}{12} = \frac{13}{12}$

soit $\pi(x) = \frac{1}{3}g_0 + (g_1 - \frac{1}{2}g_0) = g_1 - \frac{1}{6}g_0 = [t \mapsto t - \frac{1}{6}] = \pi(x)$

3. Démontrer, en utilisant habilement l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $E = C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, que : $\int_0^1 \sqrt{t}e^{-t} dt \leq \frac{\sqrt{1-e^{-2}}}{2}$

On travaille dans $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$ munit de son produit scalaire usuel : $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$

On utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz avec $f = [t \mapsto \sqrt{t}]$ et $g = [t \mapsto e^{-t}]$ qui sont bien deux vecteurs de E.

On sait que : $\langle f, g \rangle \leq |\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \|g\|$ or $\langle f, g \rangle = \int_0^1 \sqrt{t}e^{-t} dt$, $\|f\|^2 = \int_0^1 (\sqrt{t})^2 dt = \int_0^1 t dt = \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}$

et $\|g\|^2 = \int_0^1 (e^{-t})^2 dt = \int_0^1 e^{-2t} dt = \left[-\frac{e^{-2t}}{2} \right]_0^1 = \frac{1-e^{-2}}{2}$. Aussi : $\int_0^1 \sqrt{t}e^{-t} dt \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{1-e^{-2}}}{\sqrt{2}}$ d'où l'inégalité.