PT : Correction du TD n° 2 sur le chapitre VIII

EXEMPLE 10 : **Passage en coordonnées polaires. Un grand classique!**

Soit $[f:(x,y)\mapsto f(x,y)]$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et on pose $g(r,\theta)=f(r\cos\theta,r\sin\theta)$
Prouver que g est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et calculer les dérivées partielles premières et secondes de g à l'aide de f.

• $[\varphi_1:(r,\theta)\mapsto r\cos\theta]$ et $[\varphi_2:(r,\theta)\mapsto r\sin\theta]$ sont clairement C^2 sur $\mathbb{R}^2$ par les théorèmes usuels. Aussi, la fonction vectorielle $\varphi=(\varphi_1,\varphi_2)=[(r,\theta)\mapsto (r\cos\theta,r\sin\theta)]$ est aussi de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ puis, par composition avec f qui est C^2 sur $\mathbb{R}^2$, g est bien de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$

φ_1 et φ_2 sont les applications coordonnées (ou composantes) de la fonction vectorielle φ (car à valeurs dans $\mathbb{R}^2$) qu'il ne faut pas confondre avec des applications partielles $[x\mapsto f(x,y_0)]$ et $[y\mapsto f(x_0,y)]$ obtenues en fixant l'une des coordonnées et en laissant l'autre libre...

Attention à l'utilisation de la formule automatique et aux abus de notations :

$$\frac{\partial g}{\partial r}=\frac{\partial f}{\partial x}\times\underbrace{\frac{\partial x}{\partial r}}_{=\cos\theta}+\frac{\partial f}{\partial y}\times\underbrace{\frac{\partial y}{\partial r}}_{=\sin\theta}\Leftrightarrow\boxed{\frac{\partial g}{\partial r}=(\cos\theta)\frac{\partial f}{\partial x}+(\sin\theta)\frac{\partial f}{\partial y}}$$

Cette relation s'évalue en : $\dfrac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)=(\cos\theta)\dfrac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta,r\sin\theta)+(\sin\theta)\dfrac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta,r\sin\theta)$

et pas en : $\dfrac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)=(\cos\theta)\cancel{\dfrac{\partial f}{\partial x}(r,\theta)}+(\sin\theta)\cancel{\dfrac{\partial f}{\partial y}(r,\theta)}$

De même : $$\frac{\partial g}{\partial \theta}=\frac{\partial f}{\partial x}\times\underbrace{\frac{\partial x}{\partial \theta}}_{=-r\sin\theta}+\frac{\partial f}{\partial y}\times\underbrace{\frac{\partial y}{\partial \theta}}_{=r\cos\theta}\Leftrightarrow\boxed{\frac{\partial g}{\partial \theta}=(-r\sin\theta)\frac{\partial f}{\partial x}+(r\cos\theta)\frac{\partial f}{\partial y}}$$

Lorsqu'on calcule les dérivées au second ordre, il ne faut pas oublier de termes : $\dfrac{d^2g}{\partial\theta\partial r}=\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\dfrac{\partial g}{\partial r}\right)$ soit

$$\frac{d^2g}{\partial\theta\partial r}=(-\sin\theta)\frac{\partial f}{\partial x}+(\cos\theta)\frac{\partial f}{\partial y}+(\cos\theta)\left[(-r\sin\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+(r\cos\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right]+(\sin\theta)\left[(-r\sin\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+(r\cos\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right]$$

Puisque les fonctions f et g sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$, on sait d'après le théorème de Schwarz que les dérivées croisées sont égales. Aussi $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ et puisque $r\cos^2\theta+r\sin^2\theta=r$, on obtient en simplifiant :

$$\boxed{\frac{d^2g}{\partial r\partial\theta}=\frac{d^2g}{\partial\theta\partial r}=(-\sin\theta)\frac{\partial f}{\partial x}+(\cos\theta)\frac{\partial f}{\partial y}+r\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+(r\cos\theta\sin\theta)\left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right]}$$

De même :
$$\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial g}{\partial r}\right)=(\cos\theta)\left[(\cos\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+(\sin\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right]+(\sin\theta)\left[(\cos\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+(\sin\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right]$$ et en simplifiant :

$$\boxed{\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}=(\cos\theta)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2(\cos\theta)(\sin\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+(\sin\theta)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}=\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial g}{\partial\theta}\right)=(-r\cos\theta)\frac{\partial f}{\partial x}+(r\sin\theta)\frac{\partial f}{\partial y}+(-r\sin\theta)\left[(-r\sin\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+(r\cos\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right]$$
$$+(r\cos\theta)\left[(-r\sin\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+(r\cos\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right]$$

et en simplifiant :

$$\boxed{\frac{\partial^2 g}{\partial\theta^2}=(-r\cos\theta)\frac{\partial f}{\partial x}+(-r\sin\theta)\frac{\partial f}{\partial y}-2r^2(\cos\theta)(\sin\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+r^2(\sin\theta)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+r^2(\cos\theta)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}$$

EXERCICE N° 2 Si $[f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}]$ est de classe C^1, calculer les dérivées partielles de g à l'aide de celles de f lorsque
1) $g(x,y)=f(xy,y^2)$ 2) $g(x,y)=xyf(xy,x+y)$ 3) $g(x,y)=f\big(f(x,x),x\big)$

• La fonction vectorielle $[(x,y)\mapsto(xy,y^2)]$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ car ses deux fonctions coordonnées sont polynômiale donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. En composant avec f, g est bien de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)=y\frac{\partial f}{\partial x}(xy,y^2)\qquad\text{et}\qquad\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)=x\frac{\partial f}{\partial x}(xy,y^2)+2y\frac{\partial f}{\partial y}(xy,y^2)$$

• La fonction vectorielle $[(x,y)\mapsto(xy,x+y)]$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ car ses deux fonctions coordonnées sont polynômiale donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. En composant avec f, g est bien de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

De plus : $g(x,y)=g(y,x)$ aussi les dérivées partielles sont liées $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y)=\dfrac{\partial}{\partial x}\big(g(x,y)\big)=\dfrac{\partial}{\partial x}\big(g(y,x)\big)=\dfrac{\partial g}{\partial y}(y,x)$

et : $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y)=yf(xy+x+y)+xy\left[y\dfrac{\partial f}{\partial x}(xy,x+y)+1\times\dfrac{\partial f}{\partial y}(xy,x+y)\right]$

• La fonction vectorielle $[(x,y)\mapsto(x,x)]$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ car ses deux fonctions coordonnées sont polynômiale donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. En composant avec f, $(x,y)\mapsto f(x,x)$ est bien de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. Par suite, la fonction vectorielle $[(x,y)\mapsto\big(f(x,x),x\big)]$ est aussi de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ puisque ses composantes le sont. Enfin, en composant avec f, g est bien de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$

$\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y)=0$ puisque $g(x,y)$ ne dépend pas de y

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}[f(x,x)]\times\frac{\partial f}{\partial x}(f(x,x),x)+1\times\frac{\partial f}{\partial y}(f(x,x),x)=\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x,x)+\frac{\partial f}{\partial y}(x,x)\right]\times\frac{\partial f}{\partial x}(f(x,x),x)+\frac{\partial f}{\partial y}(f(x,x),x)$$