

EXERCICE N° 1 Nature des intégrales

$$I_5 = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan}(x) \sin(x)}{x^2} dx, \quad I_6 = \int_0^1 \frac{dx}{x - \sqrt{x}}, \quad I_7 = \int_0^{+\infty} \sin(t) \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt, \quad I_8 = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha} dt \text{ où } \alpha \in]0, 1[$$

Indications : Changement de variable pour I₆, Utiliser une IPP pour I₇

- $\left[f : x \mapsto \frac{\operatorname{Arctan}(x) \sin(x)}{x^2} \right]$ est continue sur $]0, +\infty[$ où $x^2 \neq 0$
Il y a deux singularités en 0 qu'on étudie séparément.
En 0 : On peut tenter un prolongement par continuité : $f(x) \sim_0 \frac{x \times x}{x^2} \sim_0 1$ donc f se prolonge par continuité avec $f(0) = 1$ et l'intégrale est faussement généralisée en 0.
En $+\infty$: **Attention, $f(t)$ ne garde pas un signe constant à cause du sinus donc on utilise une valeur absolue**
 $|f(x)| \leq \frac{\pi \times 1}{x^2}$ or $\left[x \mapsto \frac{1}{x^2} \right]$ est intégrable sur $[1, +\infty[$
Aussi : f est intégrable sur $]0, 1[$ par continuité et aussi sur $[1, +\infty[$ donc f est intégrable sur $]0, +\infty[$ et I₅ existe

- $\left[f : x \mapsto \frac{1}{x - \sqrt{x}} \right]$ est C⁰ sur $]0, 1[$. On pose $t = \sqrt{x}$, $dt = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$, $x = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$, $x \Big|_0^1, t \Big|_0^1$
 $[\varphi : x \mapsto \sqrt{x}]$ réalise une bijection de classe C¹ strictement croissante de $]0, 1[$ dans $]0, 1[$ aussi
 $\int_0^1 f(x) dx = 2 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x} - 1} \times \frac{dx}{2\sqrt{x}}$ et $\int_0^1 \frac{dt}{t - 1}$ sont de même nature.
Or : $\int_0^1 \frac{dt}{t - 1} = [\ln|t - 1|]_0^1 = \ln(1 - 1) \xrightarrow{a \rightarrow -1^-} -\infty$. Les intégrales sont donc divergentes : $I_6 = \int_0^1 \frac{dx}{x - \sqrt{x}}$ diverge

- $\left[f : t \mapsto \sin t \sin \frac{1}{t} \right]$ est continue sur $]0, +\infty[$ et n'est pas de signe constant.
On introduit : $I_1 = \int_0^1 f(t) dt$ et $I_2 = \int_1^{+\infty} f(t) dt$
En 0 : $|f(t)| \leq 1$ et $\int_0^1 dt$ converge donc I₁ est absolument convergente car f est intégrable sur $]0, 1[$.
En $+\infty$: On réalise une intégration par parties avec $\begin{cases} u'(t) = \sin t & d'où \begin{cases} u(t) = -\cos t \\ v'(t) = \sin \frac{1}{t} \end{cases} \end{cases}$ où u et v C¹ sur $[1, +\infty[$
Comme $\left[-\cos t \sin \frac{1}{t} \right]_1^{+\infty} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \underbrace{\cos t \times \sin \frac{1}{t}}_{\text{bornée}} \underbrace{\frac{1}{t}}_{\rightarrow 0} = 0 + \cos 1 \sin 1 = 0 + \cos 1 \sin 1$ converge :
les intégrales I₂ et I₂ = $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t \cos \frac{1}{t}}{t^2} dt$ ont même nature.
Or, I₂ CV car $\left[t \mapsto \frac{\cos t \cos \frac{1}{t}}{t^2} \right]$ est continue sur $[1, +\infty[$ et elle est intégrable sur $[1, +\infty[: \forall t \geq 1, \left| \frac{\cos t \cos \frac{1}{t}}{t^2} \right| \leq \frac{1}{t^2}$
et $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ cv.
Ainsi : I₂ = $\cos 1 \sin 1 - I_2$ est convergente et, finalement, $I_1 + I_2 = \int_0^{+\infty} \sin t \sin \frac{1}{t} dt$ converge.
Attention! $f(t) \sim_{+\infty} \frac{\sin t}{t}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ cv (via IPP) mais $f(t)$ ne garde pas un signe constant donc le critère d'équivalence ne s'applique pas!

$\left[f : t \mapsto \frac{\sin t}{t^\alpha} \right]$ est C⁰ sur $]0, +\infty[$ donc il y a deux singularités à étudier séparément en 0 et en $+\infty$
En 0 : $f(t) \sim_0 \frac{1}{t^\alpha}$ or : $\alpha - 1 < 0 < 1$ aussi $\left[t \mapsto \frac{1}{t^{\alpha-1}} \right]$ est intégrable sur $]0, 1[$
Par critère d'équivalence, f est intégrable sur $]0, 1[$ et donc $\int_0^1 f(t) dt$ converge (absolument).

En $+\infty$: On réalise une IPP avec $\begin{cases} u'(t) = \sin(t) & u(t) = -\cos(t) \\ v'(t) = t^{-\alpha} & v(t) = -\alpha t^{-\alpha-1} \end{cases}$ où u et v sont C¹ sur $[1, +\infty[$
On étudie la convergence de $[u(t)v(t)]_1^{+\infty} = \lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)v(t) - u(1)v(1)$:
 $u(t)v(t) = -\frac{\cos t}{t^\alpha} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ puisque $\left| -\frac{\cos t}{t^\alpha} \right| \leq \frac{1}{t^\alpha} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ car $\alpha > 0$ et donc $[u(t)v(t)]_1^{+\infty} = 0 - u(1)v(1) = \cos 1$ CV
Par intégration par partie, on sait que $I = \int_1^{+\infty} f(t) dt = \int_1^{+\infty} u(t)v'(t) dt$ et $J = \int_1^{+\infty} u'(t)v(t) dt$ ont la même nature.
 $J = -\alpha \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{\alpha+1}} dt$ or $\left| \frac{\cos t}{t^{\alpha+1}} \right| \leq \frac{1}{t^{\alpha+1}}$ et $\left[t \mapsto \frac{1}{t^{\alpha+1}} \right]$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ car $\alpha + 1 > 1$ donc, par critère d'équivalence,
 $\left[t \mapsto \frac{\cos t}{t^{\alpha+1}} \right]$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ (et donc J converge (absolue)) ce qui entraîne que I converge.
Par suite : $\int_0^{+\infty} f(t) dt = \int_0^1 f(t) dt + \int_1^{+\infty} f(t) dt$ converge ie $I_8 = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha} dt$ converge

EXERCICE N° 2 Convergence et calcul de $K = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} \sin(t) dt$ où $\alpha > 0$

Pour $K : \left[f : t \mapsto e^{-\alpha t} \sin(t) \right]$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ car elle y est C⁰ et $|f(t)| \leq e^{-\alpha t}$ or on reconnaît une intégrale de référence $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt$ qui converge.

On remarque que : $e^{-\alpha t} \sin(t) = e^{-\alpha t} \Im m(e^{it}) = \Im m(e^{-\alpha t} e^{it}) = \Im m(e^{(i-\alpha)t})$

Or, par définition d'une intégrale d'une fonction g à valeurs complexes, si les intégrales sont convergentes :

$$\int_0^{+\infty} g(t) dt = \int_0^{+\infty} \Re e(g(t)) dt + i \int_0^{+\infty} \Im m(g(t)) dt \text{ de sorte que } \Im m \left(\int_0^{+\infty} g(t) dt \right) = \int_0^{+\infty} \Im m(g(t)) dt$$

Dès lors, sous réserve que toutes les intégrales convergent :

$$K = \int_0^{+\infty} \Im m \left(e^{-\alpha t} e^{it} \right) dt = \Im m \left(\int_0^{+\infty} e^{(i-\alpha)t} dt \right) = \Im m \left(\left[\frac{1}{i-\alpha} e^{(i-\alpha)t} \right]_0^{+\infty} \right) = \Im m \left(0 - \frac{1}{i-\alpha} \right)$$

La convergence de K a été établie au début de l'exercice. Celle de l'intégrale de l'exponentielle complexe l'est par définition donc :

$$K = \Im m \left(\frac{\alpha + i}{1 + \alpha^2} \right) = \frac{1}{1 + \alpha^2} = K$$

On définit les intégrales $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t) dt$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos t) dt$

1. Justifier que I est convergente.

$[f : t \mapsto \ln(\sin t)]$ est C^0 sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ où $\sin t > 0$ Remarque: Par positivité de l'intégrale, on sait que $I < 0$

Méthode n° 1: en 0: on a

$$\sin t = t + o(t) \quad \text{d'où } f(t) = \ln(t + o(t)) = \ln(t(1 + o(1))) = \ln t + \underbrace{\ln(1 + o(1))}_{=o(\ln t)} \quad \text{car } \frac{\ln(1 + o(1))}{\ln t} \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0$$

donc: $\begin{cases} f(t) = \ln t + o(\ln t) \sim_0 \ln t \\ \ln t < 0 \text{ sur }]0, 1] \end{cases} \Rightarrow I \text{ et } \int_0^1 \ln t dt \text{ ont la même nature}$

Or, on sait que: $\int_0^1 \ln t dt$ converge $\Leftrightarrow \int_0^1 f(t) dt$ converge $\Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) dt = \boxed{I \text{ converge.}}$
Pas de singularité sur la borne haute

Méthode n° 2: Par intégration par parties avec $\begin{cases} u(t) = \ln(\sin t) & u'(t) = \frac{\cos t}{\sin t} \\ v'(t) = 1 & v(t) = t \end{cases}$ où u et v sont C^1 sur $]0, \frac{\pi}{2}]$

$$[u(t)v(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0 - \lim_{t \rightarrow 0} t \ln(\sin t) = 0 \quad \text{car } t \sim_0 \sin t \Rightarrow t \ln(\sin t) \sim_0 (\sin t) \ln(\sin t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$$

par croissance comparée avec $x = \sin t \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$

aussi les intégrales I et $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \frac{\cos t}{\sin t} dt$ sont même nature. Or: $g(t) = t \frac{\cos t}{\sin t} \sim_0 t \frac{1}{t} \sim_0 1$ et g est C^0 sur $]0, \frac{\pi}{2}]$
donc g se prolonge par continuité en 0 et K est faussement généralisée donc convergente. Ainsi: $\boxed{I \text{ converge}}$

2. Prouver, à l'aide d'un changement de variables, que J est aussi convergente et que $I = J$.

$[t \mapsto \ln(\cos t)]$ est C^0 sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ (car $\cos t > 0$) et on pose $u = \frac{\pi}{2} - t = \varphi(t)$ aussi $du = -dt$, $t \left| \begin{array}{l} \frac{\pi}{2} \\ 0 \end{array} \right. , u \left| \begin{array}{l} 0 \\ \frac{\pi}{2} \end{array} \right.$

$[\varphi : t \mapsto \frac{\pi}{2} - t]$ est C^1 , strictement décroissante donc bijective de $[0, \frac{\pi}{2}[$ dans $]0, \frac{\pi}{2}]$

Par changement de variables, J et $\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \ln(\sin u)(-du) = I$ ont même nature convergente et sont égales: $\boxed{I = J}$

3. Calculer $I + J$ et en déduire I et J .

Puisque I et J converge, on peut écrire par linéarité de l'intégrale:

$$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\ln(\sin t) + \ln(\cos t)) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t \cos t) dt$$

Or: $2 \sin t \cos t = \sin(2t)$ donc: $I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{\sin(2t)}{2}\right) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\ln(\sin(2t)) - \ln 2) dt$ (Ok car $\sin(2t) > 0$)

Toujours par linéarité, puisque $I + J$ et $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln 2 dt = -\frac{\pi \ln 2}{2}$ sont convergentes (2 intégrales sur les 3):

$$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2t)) dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln 2 dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2t)) dt - \frac{\pi \ln 2}{2}$$

En posant alors $u = 2t$ dans cette intégrale: $du = 2dt$, $t \left| \begin{array}{l} 0 \\ \frac{\pi}{2} \end{array} \right. , u \left| \begin{array}{l} 0 \\ \pi \end{array} \right.$

$\varphi = [t \mapsto 2t]$ est C^1 , strictement croissante donc bijective de $]0, \frac{\pi}{2}[$ dans $]0, \pi[$

Le changement de variable est possible et la convergence assurée puisque l'intégrale de départ converge).

On a: $I + J = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \ln(\sin u) du - \frac{\pi \ln 2}{2} = \frac{1}{2} \left(\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin u) du}_{=I} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin u) du \right) - \frac{\pi \ln 2}{2}$ avec la relation de Chasles

On pose enfin $v = \pi - u$ dans la 2nd intégrale ($[t \mapsto \pi - u]$ est C^1 , strictement décroissante donc bijective de $[\frac{\pi}{2}, \pi[$ dans $]0, \frac{\pi}{2}]$)

$$I + J = \frac{1}{2} \left(I + \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \ln(\sin v) \times -dv \right) - \frac{\pi \ln 2}{2} = \frac{1}{2} (I + I) - \frac{\pi \ln 2}{2} \quad \text{mais } I + J = 2I \text{ donc } 2I = I - \frac{\pi \ln 2}{2} \Rightarrow \boxed{I = -\frac{\pi \ln 2}{2}}$$