PT : Correction du TD n° 1sur le chapitre VI

EXERCICE N° 1 Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables ? Si oui, les diagonaliser.

$$A=\begin{pmatrix}3&2&0\\-4&-1&2\\3&2&0\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}-1&-2&2\\6&7&-6\\2&2&-1\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&-1&1\\1&0&-1\end{pmatrix}$$

Pour C*, montrer (sans calcul ou presque) que* 0 *est valeur propre et que* $\begin{pmatrix}1\\j\\j^2\end{pmatrix}$ *est vecteur propre où* $j=e^{\frac{2i\pi}{3}}$

Cas de la matrice A

Conseil: prenez l'habitude d'organiser vos calculs en indiquant ce que vous allez faire. Ces phrases d'introduction permettent, en outre, de rappeler les notations que vous utilisez...

• On calcule le polynôme caractéristique $\chi_A(x)=\det(xI_3-A)$ sous forme factorisée:

$$\chi_A(x)=\begin{vmatrix}x-3&-2&0\\4&x+1&-2\\-3&-2&x\end{vmatrix}\underset{L_1\leftarrow L_1+L_3}{=}\begin{vmatrix}x&0&-x\\4&x+1&-2\\-3&-2&x\end{vmatrix}=x\begin{vmatrix}1&0&-1\\4&x+1&-2\\-3&-2&x\end{vmatrix}\underset{C_3\leftarrow C_3+C_2}{=}x\begin{vmatrix}1&0&0\\4&x+1&2\\-3&-2&x-3\end{vmatrix}$$

d'où $\chi_A(x)=x\big((x+1)(x-3)+4\big)=x(x^2-2x+1)=x(x-1)^2$

Alors: $\underline{\chi_A=x(x-1)^2 \text{ est scindé dans } \mathbb{R}[X]}$ et $\mathrm{Sp}(A)=\{0,1\}$ avec les multiplicités $\begin{cases}m(0)=1\\m(1)=2\end{cases}$

• On compare, pour $\lambda\in\mathrm{Sp}(A)$, la multiplicité $m(\lambda)$ et la dimension de l'espace propre $E_\lambda(A)=\mathrm{Ker}\,(A-\lambda I_3)$

Conseil: commencer par les valeurs propres multiples qui sont celles où l'égalité n'est pas assurée

$E_1(A)=\mathrm{Ker}\,(A-I_3)=\mathrm{Ker}\begin{pmatrix}2&2&0\\-4&-2&2\\3&2&-1\end{pmatrix}$ or $\begin{cases}C_1=C_2-C_3\\(C_1,C_2)\text{ libre}\end{cases}$ avec C_j la colonne j de $A-I_3$ donc $\mathrm{rg}(A-I_3)=2$

Le théorème du rang donne alors: $\dim E_1(A)=3-\mathrm{rg}(A-I_3)=3-2=1\neq m(1)$

Puisque $\dim E_1(A)\neq m(1)$, on peut conclure que $\boxed{\text{A n'est pas diagonalisable ni dans } M_n(\mathbb{R}) \text{ ni dans } M_n(\mathbb{C})}$

Il n'est donc pas nécessaire, pour conclure, d'examiner le cas de la valeur propre 0 mais, de toute manière, 0 étant une valeur propre simple, on sait, d'après le cours, que $1\leqslant\dim E_0(A)\leqslant m(0)\Rightarrow\dim E_0(A)=1=m(0)$

Cas de la matrice B

• On calcule le polynôme caractéristique $\chi_B(x)=\det(xI_3-B)$ sous forme factorisée:

$$\chi_B(x)=\begin{vmatrix}x+1&2&0\\-6&x-7&x-1\\-2&-2&x-1\end{vmatrix}=(x-1)\begin{vmatrix}x+1&2&0\\-6&x-7&1\\-2&-2&1\end{vmatrix}\underset{L_2\leftarrow L_2-L_3}{=}(x-1)\begin{vmatrix}x+1&2&0\\-4&x-5&0\\-2&-2&1\end{vmatrix}$$

En développant selon la colonne 3: $\chi_B(x)=(x-1)\big((x+1)(x-5)+8\big)=(x-1)(x^2-4x+3)=(x-1)(x-1)(x-3)$

Aussi: $\chi_B(x)=(x-1)^2(x-3)$ donc $\underline{\chi_B \text{ est scindé dans } \mathbb{R}[X]}$ et $\mathrm{Sp}(B)=\{1,3\}$ avec les multiplicités $\begin{cases}m(1)=2\\m(3)=1\end{cases}$

• On compare, pour $\lambda\in\mathrm{Sp}(B)$, la multiplicité $m(\lambda)$ et la dimension de l'espace propre $E_\lambda(B)=\mathrm{Ker}\,(B-\lambda I_3)$

$E_B(1)=\mathrm{Ker}\,(B-I_3)=\mathrm{Ker}\begin{pmatrix}-2&-2&2\\6&6&-6\\2&2&-2\end{pmatrix}$ et on remarque $C_1=C_2=-C_3$ où C_j est la colonne j de $B-I_3$

Aussi: $\mathrm{rg}(B-I_3)=1\Rightarrow\dim E_B(1)=3-1=2$ par le théorème du rang. Ainsi: $\underline{\dim E_1(B)=m(1)}$

Pour $E_3(B)$, 3 étant une valeur propre simple, on sait d'après le cours que: $\underline{\dim E_3(A)=1=m(3)}$

• On peut conclure grâce à la condition nécessaire et suffisante de diagonalisation:

$$\begin{cases}\chi_B=(X-1)^2(X-3)\text{ est scindé dans }\mathbb{R}[X]\\\forall\lambda\in\mathrm{Sp}(B),\ \dim E_\lambda(B)=m(\lambda)\end{cases}\Rightarrow\boxed{\text{B est diagonalisable dans } M_n(\mathbb{R})}$$

• On précise une base de chacun des sev propres $E_\lambda(B)$ pour obtenir la base de diagonalisation

$E_1(B)$ est un sev de dimension 2 donc on cherche 2 vecteurs non colinéaire de $E_1(B)$ avec les liaisons sur les colonnes:

$(B-I_3)\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=(B-I_3)\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ et $\underline{\varepsilon_1=(1,0,1)\text{ et }\varepsilon_2=(1,-1,0)}$ non colinéaires donc $\underline{(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\text{ est une base de }E_1(B)}$.

$E_3(B)$ est un sev de dimension 1 donc on cherche 1 vecteur non nul de $E_B(3)=\mathrm{Ker}\,(B-3I_3)=\mathrm{Ker}\begin{pmatrix}-4&-2&2\\6&4&-6\\2&2&-4\end{pmatrix}$

On ne repère pas de liaison sur les colonnes de la matrices donc on utilise un système:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in E_3(B)\Leftrightarrow\begin{cases}-2x-y+z=0\\3x+2y-3z=0\\x+y-2z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-x-z=0\\3x+2y-3z=0\\x+y-2z=0\end{cases}\underset{L_1\leftarrow L_1+L_3}{\Leftrightarrow}\begin{cases}z=-x\\y=-3x\end{cases}\underset{\text{par substitution}}{\Leftrightarrow}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\-3\\-1\end{pmatrix}$$

Conseil: Vous devez donner des indications aux correcteurs pour lui permettre de suivre votre calculs sans avoir « à deviner » les opérations que vous avez faites...

Ainsi: $E_3(B)=\mathrm{Vect}\big((1,-3,-1)\big)$ et donc $\underline{\varepsilon_3=(1,-3,-1)\text{ forme une base de }E_3(B)}$

Conclusion: $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)=\big((1,0,1),(1,-1,0),(1,-3,-1)\big)$ est une base de diagonalisation de B et

$$\boxed{P=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-1&-3\\1&0&-1\end{pmatrix}\in GL_3(\mathbb{R}),\quad D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&3\end{pmatrix}\quad\text{et on a}\quad D=P^{-1}BP}$$

Cas de la matrice C

• On calcule le polynôme caractéristique $\chi_C(x)=\det(xI_3-C)$ sous forme factorisée:

$$\chi_C(x)=\begin{vmatrix}x+1&-1&0\\0&x+1&-1\\-1&0&x+1\end{vmatrix}\underset{C_1\leftarrow C_1+C_2+C_3}{=}x\begin{vmatrix}1&-1&0\\1&x+1&-1\\1&0&x+1\end{vmatrix}\underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-L_1\\L_3\leftarrow L_3-L_1}}{=}x\begin{vmatrix}1&-1&0\\0&x+2&-1\\0&1&x+1\end{vmatrix}$$

En développant selon C_1: $\chi_C(x)=x\big((x+2)(x+1)+1\big)=x(x^2+3x+3)$ or $\Delta=3^2-4\times3=-3<0$

Ainsi: χ_C n'est pas scindé dans $\mathbb{R}[X]$ donc $\boxed{\text{C n'est pas diagonalisable dans } M_3(\mathbb{R})}$

Toutefois, x^2+3x+3 admet deux racines complexes conjuguées: $\alpha=\dfrac{-3+i\sqrt{3}}{2}$ et $\overline{\alpha}$.

De ce fait: $\chi_C(x)=x(x-\alpha)(x-\overline{\alpha})$ est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}[X]\Rightarrow\boxed{\text{C est diagonalisable dans } M_3(\mathbb{C})}$

On utilise ici la condition suffisante (mais non nécessaire) pour assurer la diagonalisation

• On précise une base de chacun des sous-espace propre: ils sont tous de dimension 1 donc il suffit de trouver un vecteur non nul dans chacun pour en avoir une base. On remarque que, en utilisant les indications du sujets:

Conseil: Les indications du sujets (et parfois les questions précédentes) peuvent vous faire gagner beaucoup, beaucoup de temps !

$C\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ donc 0 est valeur propre associé à $(1,1,1)\neq(0,0,0)$

$X=\begin{pmatrix}1\\j\\j^2\end{pmatrix}\neq0_{\mathbb{C}^3}$ et $C\begin{pmatrix}1\\j\\j^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1+j\\-j+j^2\\1-j^2\end{pmatrix}=(-1+j)\begin{pmatrix}1\\j\\-(1+j)\end{pmatrix}=(j-1)\begin{pmatrix}1\\j\\j^2\end{pmatrix}$ car $1+j+j^2=0$ (racine 3ème de l'unité)

on factorise par $-1+j$ pour espérer faire réapparaître X dans l'optique d'avoir une relation $CX=\lambda X$

Ainsi: $(1,j,j^2)$ est vecteur propre associé à la valeur propre $j-1=\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}-1=\dfrac{-3+i\sqrt{3}}{2}=\alpha$

Comme la matrice C est à coefficients réels, on sait que $\overline{\alpha}=\overline{j-1}=j^2-1$ est aussi une valeur propre associée au vecteur $(1,\overline{j},\overline{j^2})=(1,j^2,j)$

<u>Remarque 1</u>: Puisqu'on connaît 2 valeurs propres $\lambda_1=0$ et $\lambda_2=j-1$, on peut aussi trouver la 3ème λ_3 avec la trace: $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=\mathrm{tr}(C)\Leftrightarrow0+j-1+\lambda_3=-3\Leftrightarrow\lambda_3=-2-j=-1+(-1-j)=j^2-1$ vu que $1+j+j^2=0\Leftrightarrow j^2=-1-j$

<u>Remarque 2</u>: En utilisant ces indications, dés le départ, on pouvait même éviter le calcul du polynôme caractéristique via un déterminant ! En effet, on connaît les 3 valeurs propres complexes qui sont les 3 racines complexes du polynômes χ_C qui est unitaire et de degré 3 aussi: $\chi_C(x)=x(x-j+1)(x-j^2+1)$ qui est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}[X]$ mais qui n'est pas scindé dans $\mathbb{R}[X]$ puisqu'il a des racines complexes conjuguées

Conclusion: $\big((1,1,1),(1,j,j^2),(1,j^2,j)\big)$ est une base de diagonalisation de C dans $M_n(\mathbb{C})$ et

$$\boxed{P=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&j&j^2\\1&j^2&j\end{pmatrix}\in GL_3(\mathbb{C})\quad\text{et}\quad D=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&j-1&0\\0&0&j^2-1\end{pmatrix}\quad\text{vérifient}\quad D=P^{-1}CP}$$

EXEMPLE N° 2 Déterminer, suivant les valeurs du réel α, les valeurs propres et leurs multiplicités de

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \alpha \\ 1+\alpha & -\alpha & -1-\alpha \\ -\alpha & \alpha & 1+\alpha \end{pmatrix}$$

Pour quelles valeurs du réel α, la matrice M est diagonalisable ?

$$\chi_M(x) = \det(xI_3 - M) = \begin{vmatrix} x & -\alpha & -\alpha \\ -1-\alpha & x+\alpha & 1+\alpha \\ \alpha & -\alpha & x-1-\alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & -\alpha & 0 \\ -1-\alpha & x+\alpha & 1-x \\ \alpha & -\alpha & x-1 \end{vmatrix}_{C_3 \leftarrow C_3 - C_2}$$

$$\text{soit } \chi_M = (x-1) \begin{vmatrix} x & -\alpha & 0 \\ -1-\alpha & x+\alpha & -1 \\ \alpha & -\alpha & 1 \end{vmatrix} = (x-1) \begin{vmatrix} x & -\alpha & 0 \\ -1 & x & 0 \\ \alpha & -\alpha & 1 \end{vmatrix}_{L_2 \leftarrow L_2 + L_3} = (x-1)(x^2 - \alpha)$$

<u>1er cas</u> : si $\alpha < 0$, alors $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(M) = \{1\}$ et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M) = \{1, i\sqrt{\alpha}, -i\sqrt{\alpha}\}$ Les valeurs propres sont toutes simples.
χ_M n'est pas scindé dans $\mathbb{R}[X]$ donc M n'est pas diagonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$
χ_M est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}[X]$ donc M est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$

<u>2nd cas</u> : si $\alpha = 0$ alors il y a une racine double 2 qui est 0 et une simple 1 qui est 1 : $\chi_M = X^2(X-1)$ avec $\begin{cases} m(0) = 2 \\ m(1) = 1 \end{cases}$

On examine $\dim E_0(M) = \dim \mathrm{Ker}\,(M) = \dim \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ associé à la valeur propre 0

$\mathrm{rg}(M) = 2 \Rightarrow \dim \mathrm{Ker}\,(M) = 3 - 2 = 1$ aussi $\dim E_M(0) = 1 \neq m(0) \Rightarrow$ M n'est pas diagonalisable
<u>3eme cas</u> : si $\alpha \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$, il y a 3 valeurs propres simples : $1, \sqrt{\alpha}$ et $-\sqrt{\alpha}$
donc M est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$ car χ_M est scindé à racines simples.

<u>4eme cas</u> : si $\alpha = 1$ alors il y a une racine double 1 et une simple -1 : $\chi_M = (X+1)(X-1)^2$ avec $\begin{cases} m(-1) = 1 \\ m(1) = 2 \end{cases}$

On examine $\dim E_1(M) = \dim \mathrm{Ker}\,(M - I_3) = \dim \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\mathrm{rg}(M - I_3) = 1 \Rightarrow \dim \mathrm{Ker}\,(M - I_3) = 3 - 1 = 2$ aussi $\begin{cases} \chi_M = (X+1)(X-1)^2 \text{ est scindé} \\ \dim E_M(1) = m(1) \\ \dim E_M(-1) = 1 = m(-1) \text{vp simple} \end{cases}$ $\Rightarrow$ M est diagonalisable

Finalement : $\boxed{\text{M est diagonalisable si et seulement si } \alpha > 0}$