

PT : TD n°2 sur le chapitre V

EXERCICE N° 4

Résoudre l'équation

$$\begin{vmatrix} y'' & y' & y \\ -4\sin(2x) & 2\cos(2x) & \sin(2x) \\ -\cos x & -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 0 \quad \text{là où elle est résolue en } y''$$

En développant ce déterminant selon L_1 , on trouve une EDL2 $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0$ avec :

$$a(x) = 2\cos(2x)\cos x + \sin(2x)\sin x = 2(\cos^2 x - \sin^2 x)\cos x + (2\sin x \cos x)\sin x = 2\cos^3 x$$

$$a(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}[\pi] \text{ aussi on résout donc sur un } I \text{ qui ne contient pas les valeurs } \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z}.$$

Sur I , il s'agit d'une EDL2 homogène donc, d'après le cours, l'ensemble des solutions est un sev de dimension 2 du type $\text{Vect}(h_1, h_2)$ avec (h_1, h_2) libre. On remarque que

$h_1 = [x \mapsto \cos x]$ est une solution car la ligne 1 est alors égale à la ligne 3 dans le déterminant donc celui-ci est nul.

$h_2 = [x \mapsto \sin(2x)]$ est une solution car la ligne 1 est alors égale à la ligne 2 dans le déterminant.

Les solutions h_1 et h_2 sont non colinéaires (l'une est paire, l'autre impaire ou l'une s'annule en 0 et l'autre pas) donc on a obtenu une base de l'ensemble des solutions.

$$\text{L'ensemble des solutions est donc } \text{Vect}(h_1, h_2) = \{[x \mapsto \lambda \cos x + \mu \sin(2x)] \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$$

EXERCICE N° 5

On considère l'équation (E) : $(2x+1)y'' + (4x-2)y' - 8y = 0$ 1. Déterminer les solutions de la forme $[x \mapsto e^{\alpha x}]$

Si $y(x) = e^{\alpha x}$ alors y est C^2 sur $\mathbb{R}$ donc sur tout intervalle I de $\mathbb{R}$ et : $y'(x) = \alpha e^{\alpha x}$, $y''(x) = \alpha^2 e^{\alpha x}$

$$\forall x \in I, (2x+1)y''(x) + (4x-2)y'(x) - 8y(x) = 0 \Leftrightarrow ((2\alpha^2 + 4\alpha)x + (\alpha^2 - 2\alpha - 8)) \underbrace{e^{\alpha x}}_{\neq 0} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha^2 + 4\alpha = 0 \\ \alpha^2 - 2\alpha - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha(\alpha + 2) = 0 \\ (\alpha + 2)(\alpha - 4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = -2$$

2. Déterminer les solutions polynomiales.

Si P est un polynôme non nul solution de (E), on a $P = aX^n + R$ où $a \neq 0$ et $n \in \mathbb{N}$.

$$\text{En examinant le coefficient du terme de degré } n : \underbrace{(2X+1)P'' + (4X-2)P' - 8P}_{\deg < n} = 0 \Rightarrow (4n-8) \underbrace{a}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow n = 2$$

Aussi, $P = aX^2 + bX + c$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et :

$$(2X+1) \times 2a + (4X-2) \times (2aX+b) - 8(aX^2 + bX + c) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 8a - 8a = 0 \\ 4a - 4a + 4b - 8b = 0 \\ 2a - 2b - 8c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow b = 0 \text{ et } a = 4c$$

$$\text{Ainsi, l'ensemble des solutions polynomiales de (E) } \text{Vect}([x \mapsto 4x^2 + 1]) = \{[x \mapsto 4cx^2 + c] \mid c \in \mathbb{R}\}$$

3. Résoudre alors (E) sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ qui ne contient pas $-\frac{1}{2}$.

Sur I , la théorie s'applique pour l'EDL2 (E) homogène donc l'ensemble des solutions est un sev de dimension 2. Or, on connaît deux solutions non colinéaires $[y_1 : x \mapsto e^{-2x}]$ et $[y_2 : x \mapsto 4x^2 + 1]$ aussi on peut conclure que l'ensemble des solutions sur I de (E) est $\text{Vect}(y_1, y_2) = \{[x \mapsto ae^{-2x} + 4bx^2 + b] \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$

4. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$

Une solution y sur $\mathbb{R}$ est telle que :

$$\exists (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4, y(x) = \begin{cases} ae^{-2x} + 4bx^2 + b & \text{si } x < -\frac{1}{2} \\ ce^{-2x} + 4dx^2 + d & \text{si } x > -\frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{et } y \text{ deux fois dérivable en } -\frac{1}{2}$$

y est continue en $-\frac{1}{2}$ donc : $y(-1/2) = ae^1 + b + b = ce^1 + c + c$

$$y' \text{ où } y'(x) = \begin{cases} -2ae^{-2x} + 8bx & \text{si } x < -\frac{1}{2} \\ -2ce^{-2x} + 8dx & \text{si } x > -\frac{1}{2} \end{cases} \text{ est continue en } -\frac{1}{2} \text{ donc : } y'(-1/2) = -2ae^1 - 4b = -2ce^1 - 4c$$

vérifiée si $ae + 2b = ce + 2d$ est vraie

y' est dérivable en $-1/2$ donc elle doit admettre un DL1 en $-1/2$:

$$y'(-1/2 + h) = -2ae^{1-2h} + b(-4 + 8h) = -2ae^1(1 - 2h + o(h)) - 4b + 8bh = (-2ae^1 - 4b) + (8b + 4ae^1)h + o(h)$$

$$\text{Or, sous la condition } ae + 2b = ce + 2d, \text{ on a aussi : } y'(-1/2 + h) = (-2ce^1 - 4d) + (8d + 4ce^1)h + o(h)$$

Et, y' admet un DL1 en $-1/2$ sans condition supplémentaire. En conclusion :

$$\text{l'expression des solutions sur } \mathbb{R} \text{ est } y(x) = \begin{cases} ae^{-2x} + 4bx^2 + b & \text{si } x \leq -\frac{1}{2} \\ ce^{-2x} + 4dx^2 + d & \text{si } x > -\frac{1}{2} \end{cases} \text{ avec } \begin{cases} (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \\ \text{vérifiant } ae + 2b = ce + 2d \end{cases}$$

EXERCICE N° 6

On considère sur $]0, +\infty[$ l'équation différentielle (E) : $t^2 y'' + 4t y' + 2y = \frac{1}{t}$

1. Vérifier que $\left[t \mapsto \frac{1}{t^2} \right]$ est une solution homogène de (E)

$f = \left[t \mapsto \frac{1}{t^2} \right]$ est de classe C^2 (et même C^∞) sur $]0, +\infty[$ et : $\forall t > 0, f'(t) = -\frac{2}{t^3}$ et $f''(t) = \frac{6}{t^4}$

aussi : $t^2 f''(t) + 4t f'(t) + 2f(t) = \frac{6}{t^2} - \frac{8}{t^2} + \frac{2}{t^2} = 0$ donc f est bien une solution de (E)

2. En déduire l'ensemble des solutions homogènes de (E)

Sur $]0, +\infty[$, (E) est une EDL2 résolue en y'' à coefficients non constants.

On sait que l'ensemble des solutions homogène est de la forme $\text{Vect}(h_1, h_2)$ où h_1 et h_2 sont non colinéaires.

Avec la question 1, on peut déjà imposer $h_1 = f = \left[t \mapsto \frac{1}{t^2} \right]$

On utilise la méthode de Lagrange pour trouver une autre solution homogène h_2 sous la forme $h_2(t) = C(t)h_1(t)$ où C est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$: $h_2' = C'h_1 + Ch_1'$ et $h_2'' = C''h_1 + 2C'h_1' + Ch_1''$
 $t^2 h_2'' + 4t h_2' + 2h_2 = 0 \Leftrightarrow t^2 C''h_1 + (2t^2 h_1' + 4t h_1)C' + \underbrace{(t^2 h_1'' + 2t h_1' + 2h_1)}_{=0} C = 0$

$$\Leftrightarrow C' \text{ solution de } t^2 h_1 Y' + (2t^2 h_1' + 4t h_1)Y = 0 \text{ soit } Y' + \left(-\frac{4}{t} + \frac{4}{t} \right) Y = 0 \text{ soit } Y' = 0$$

$\Leftrightarrow C'$ est donc une fonction constante $\Leftrightarrow C$ est une fonction affine

On choisit, par exemple, $C(t) = t$, qui conduit à $h_2(t) = t \times \frac{1}{t^2} = \frac{1}{t}$

Les fonctions h_1 et h_2 ne sont pas colinéaire (car non proportionnelle).

Les solutions homogènes de (E) sur $]0, +\infty[$ sont les fonctions d'expression $y(t) = \frac{A}{t} + \frac{B}{t^2}$ où $(A, B) \in \mathbb{R}^2$

3. En utilisant la méthode de variation de la constante, déterminer les solution de (E).

On utilise, à nouveau, la méthode de Lagrange mais cette fois avec le second membre pour obtenir une solution particulière en cherchant y solution sous la forme $y(t) = C(t)h(t)$ avec $h(t) = \frac{1}{t^2}$

En reprenant les calculs précédents, on a : $t^2 y'' + 4t y' + 2y = \frac{1}{t} \Leftrightarrow C'$ est solution de $Y' = \frac{1}{t}$

On cherche une solution donc il suffit de prendre une primitive. Par exemple : $C'(t) = \ln t$ (car $t > 0$)

et $C'(t) = \int_t \ln x dx = [t \times \ln t] - \int_t x \times \frac{1}{x} dx = t \ln t - \int_t dx = t \ln t - t + K$ où $K \in \mathbb{R}$

En fixant $K = 0$, on a $C(t) = t \ln t - t$ puis $y(t) = C(t)h(t) = \frac{\ln t}{t} - \frac{1}{t}$

Finalement, l'expression d'une solution générale de (E) est $y(t) = \frac{\ln t}{t} - \frac{1}{t} + \frac{A}{t} + \frac{B}{t^2}$ où $(A, B) \in \mathbb{R}^2$

ou encore, en jouant sur les constantes : $y(t) = \frac{\ln t}{t} + \frac{\lambda}{t} + \frac{\mu}{t^2}$ où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ ici $(\lambda, \mu) = (A - 1, B)$ qui décrit $\mathbb{R}^2$ tout entier

EXERCICE N° 7

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $(1 + x^2)y'' + xy' - y = 0$ en posant $x = \text{sh } t$

sh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^1 . On cherche une équation vérifiée par $z(t) = y(\text{sh } t)$ sur $\mathbb{R}$

Si y est une solution, z sera deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ par composition et :

$$z'(t) = (\text{ch } t)y'(\text{sh } t) \text{ et } z''(t) = (\text{sh } t)y'(\text{sh } t) + (\text{ch } t)^2 y''(\text{sh } t) = (1 + \text{sh}^2 t)y''(\text{sh } t) + (\text{sh } t)y'(\text{sh } t)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, (1 + x^2)y''(x) + xy'(x) - y(x) = 0 \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \underbrace{(1 + \text{sh}^2 t)y''(\text{sh } t) + (\text{sh } t)y'(\text{sh } t)}_{=z''(t)} - y(\text{sh } t) = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, z''(t) - z(t) = 0$$

On résout alors l'EDL2 à coefficients constants vérifiée par z : $r^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow r = 1$ ou $r = -1$ donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (1 + x^2)y''(x) + xy'(x) - y(x) = 0 \Leftrightarrow \exists (A, B) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R}, y(\text{sh } t) = z(t) = Ae^t + Be^{-t}$$

Il reste à exprimer e^t et e^{-t} en fonction de $x = \text{sh } t$ pour tout t réel :

$$e^t = \text{ch } t + \text{sh } t = \sqrt{\text{ch}^2 t} + \text{sh } t = \sqrt{1 + \text{sh}^2 t} + \text{sh } t \text{ et } e^{-t} = \text{ch } t - \text{sh } t = \sqrt{\text{ch}^2 t} - \text{sh } t = \sqrt{1 + \text{sh}^2 t} - \text{sh } t$$

$$\text{Ainsi : } \forall x \in \mathbb{R}, (1 + x^2)y''(x) + xy'(x) - y(x) = 0 \Leftrightarrow \exists (A, B) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R}, y(x) = A(\sqrt{1 + x^2} + x) + B(\sqrt{1 + x^2} - x)$$