PT : Correction du TD n°2 sur le chapitre IV

EXERCICE N° 2 Dans un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ orthonormé du plan, on considère la droite $\Delta : x=-4$ et le point F de coordonnées $(2,0)$. Déterminer une équation réduite et esquisser la conique $\mathscr{C}$ de foyer F, de directrice $\mathscr{D}$ et d'excentricité $e=\frac{1}{\sqrt{2}}$. Même question avec $e=\sqrt{2}$.

Par définition : $M(x,y)\in\mathscr{C} \Leftrightarrow MF = e\times d(M,\Delta) = e\times MH$ où H est le projeté orthogonal de M sur Δ

Par construction : $H(-4,y_H)$ car $H\in\Delta$ et Δ étant dirigée par $\vec{\jmath}$: $\overrightarrow{MH}.\vec{\jmath}=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-(-4) \\ y-y_H \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow y-y_H=0$

De ce fait : $M(x,y)\in\mathscr{C} \Leftrightarrow MF^2=e^2\times MH^2 \Leftrightarrow (x-2)^2+(y-0)^2=e^2\times\left((x-(-4))^2+(y-y)^2\right) \Leftrightarrow (x-2)^2+y^2=e^2(x+4)^2$

Cas $e=\frac{1}{4}$: on sait que, dans ce cas, $\mathscr{C}$ est une ellipse. Retrouvons son équation réduite :

$(x-2)^2+y^2=\frac{1}{2}(x+4)^2 \Leftrightarrow 2(x^2-4x+4)+2y^2=x^2+8x+16 \Leftrightarrow x^2-16x+2y^2=8$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(x^2-16x)}_{=(x-8)^2-64}+2y^2=8$$

$$\Leftrightarrow (x-8)^2+2y^2=72 \Leftrightarrow \frac{(x-8)^2}{(2\times3\times\sqrt{2})^2}+\frac{y^2}{6^2}=1$$

Finalement, $\mathscr{C}$ est bien une ellipse de centre $\Omega(8,0)$, d'axes de symétrie $\Omega+\mathrm{Vect}(\vec{\imath})$ et $\Omega+\mathrm{Vect}(\vec{\jmath})$ et de demi-axes $a=6\sqrt{2}$ et $b=6$

Cas $e=2$: on sait que, dans ce cas, $\mathscr{C}$ est une hyperbole. Retrouvons son équation réduite :

$(x-2)^2+y^2=2(x+4)^2 \Leftrightarrow (x^2-4x+4)+y^2=2x^2+16x+32 \Leftrightarrow x^2+20x-y^2+28=0$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(x^2+20x)}_{=(x+10)^2-100}-y^2+28=0$$

$$\Leftrightarrow 3(x+10)^2-y^2=72 \Leftrightarrow \frac{(x+10)^2}{(2\times3\times\sqrt{2})^2}-\frac{y^2}{(2\times3\times\sqrt{2})^2}=1$$

Finalement, $\mathscr{C}$ est bien une hyperbole équilatère de centre $\Omega(-10,0)$, d'axes de symétrie $\Omega+\mathrm{Vect}(\vec{\imath})$ et $\Omega+\mathrm{Vect}(\vec{\jmath})$, de sommet $(-10+6\sqrt{2},0)$ et $(-10-6\sqrt{2},0)$, d'asymptotes $\Omega+\mathrm{Vect}(\vec{\imath}+\vec{\jmath})$

EXERCICE N° 3 Déterminer l'enveloppe des droites $(A_tB_t)_{t\in\mathbb{R}}$ où $A_t(a\cos t,0)$ et $B_t(0,a\sin t)$ (càd A_t est sur l'axe des abscisse, B_t sur l'axe des ordonnées et $A_tB_t=a>0$)

Soit $\mathscr{D}_t=(A_tB_t)=A(t)+\mathrm{Vect}(\vec{u}(t))$ où $A(t)=A_t=(a\cos t,0)$ et $\vec{u}(t)=\overrightarrow{A_tB_t}=\begin{pmatrix} -a\cos(t) \\ a\sin(t)\end{pmatrix}$

On cherche un paramétrage régulier $[t\mapsto\overrightarrow{OM}(t)]$ de l'enveloppe Γ de la famille $(\mathscr{D}_t)_{t\in\mathbb{R}}$.
On sait que $\mathscr{D}_t$ est la tangente en $M(t)$ à la courbe Γ autrement dit :

• $M(t)$ est sur la droite $\mathscr{D}_t$ donc : $\exists\lambda(t)\in\mathbb{R},\quad \overrightarrow{OM}(t)=\overrightarrow{OA}(t)+\lambda(t)\vec{u}(t)$

• les vecteurs $\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$ et $\vec{u}(t)$ dirige tous les deux la droite $\mathscr{D}_t$ donc ils sont colinéaires soit $\det\left(\frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt},\vec{u}(t)\right)=0$

Or : $\det\left(\frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt},\vec{u}(t)\right)=0 \Leftrightarrow \det\left(\frac{d\overrightarrow{OA}(t)}{dt}+\lambda'(t)\vec{u}(t)+\lambda(t)\vec{u}'(t),\vec{u}(t)\right)=0$

$$\Leftrightarrow \det\left(\frac{d\overrightarrow{OA}(t)}{dt},\vec{u}(t)\right)+\lambda'(t)\underbrace{\det\left(\vec{u}(t),\vec{u}(t)\right)}_{=0}+\lambda(t)\det\left(\vec{u}'(t),\vec{u}(t)\right)=0$$

Mais : $\det\left(\vec{u}'(t),\vec{u}(t)\right)=\begin{vmatrix} a\sin(t) & -a\cos(t) \\ a\cos(t) & a\sin(t)\end{vmatrix}=a^2\sin^2(t)+a^2\cos^2(t)=a^2>0$

Aussi : $\lambda(t)=-\frac{1}{a^2}\det\left(\frac{d\overrightarrow{OA}(t)}{dt},\vec{u}(t)\right)=-\frac{1}{a^2}\begin{vmatrix} -a\sin(t) & -a\cos(t) \\ 0 & a\sin(t)\end{vmatrix}=-\frac{1}{a^2}\times -a^2\sin^2(t)=\sin^2(t)$

et donc : $\overrightarrow{OM}(t)=\overrightarrow{OA}(t)+\lambda(t)\vec{u}(t)=\begin{pmatrix} a\cos(t) \\ 0\end{pmatrix}+\sin^2(t)\begin{pmatrix} -a\cos(t) \\ a\sin(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a\cos(t)\left(1-\sin^2(t)\right) \\ a\sin^3(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a\cos(t)\times\cos^2(t) \\ a\sin^3(t)\end{pmatrix}$

Ainsi, l'enveloppe cherchée a pour représentation $\Gamma : \begin{cases} x=a\cos^3(t) \\ y=a\sin^3(t)\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$: c'est l'astroïde.

EXERCICE N° 3.5 Soit F un point du plan qui est à l'intérieur du cercle trigonométrique sans être sur le cercle, déterminer l'enveloppe des médiatrice [MF] lorsque M décrit le cercle trigonométrique.

Le sujet nous laisse libre du choix du repère aussi on choisit que (OF) est l'axe des abscisses de sorte que $F(d,0)$ où $|d|<1$ (car F est à l'intérieur du cercle trigonométrique sans être sur le cercle).
Un paramétrage du cercle est $[t\mapsto\overrightarrow{OM}(t)]$ où $M(t)=\left(\cos(t),\sin(t)\right)$ et $t\in[0,2\pi]$

La médiatrice [MF] est donc la droite qui passe par $A(t)=\left(\frac{d+\cos(t)}{2},\frac{\sin(t)}{2}\right)$ milieu de [MF] et qui est normal à $\overrightarrow{MF}=\begin{pmatrix} d-\cos(t) \\ -\sin(t)\end{pmatrix}$ donc colinéaire à $\vec{u}(t)=\begin{pmatrix} \sin(t) \\ d-\cos(t)\end{pmatrix}$

On cherche donc l'enveloppe Γ des droites $\mathscr{D}_t=A(t)+\mathrm{Vect}(\vec{u}(t))$ où $t\in[0,2\pi]$
On recherche un paramétrage $[t\mapsto\overrightarrow{OP}(t)]$ régulier de cette enveloppe (Attention, le point $M(t)$ est déjà utilisé!)
On sait que $\mathscr{D}_t$ est la tangente en $P(t)$ à la courbe Γ autrement dit :

• $P(t)$ est sur la droite $\mathscr{D}_t$ donc : $\exists\lambda(t)\in\mathbb{R},\quad \overrightarrow{OP}(t)=\overrightarrow{OA}(t)+\lambda(t)\vec{u}(t)$

• les vecteurs $\frac{d\overrightarrow{OP}}{dt}$ et $\vec{u}(t)$ dirige tous les deux la droite $\mathscr{D}_t$ donc ils sont colinéaires soit $\det\left(\frac{d\overrightarrow{OP}(t)}{dt},\vec{u}(t)\right)=0$

Or : $\det\left(\frac{d\overrightarrow{OP}(t)}{dt},\vec{u}(t)\right)=0 \Leftrightarrow \det\left(\frac{d\overrightarrow{OA}(t)}{dt}+\lambda'(t)\vec{u}(t)+\lambda(t)\vec{u}'(t),\vec{u}(t)\right)=0$

$$\Leftrightarrow \det\left(\frac{d\overrightarrow{OA}(t)}{dt},\vec{u}(t)\right)+\lambda'(t)\underbrace{\det\left(\vec{u}(t),\vec{u}(t)\right)}_{=0}+\lambda(t)\det\left(\vec{u}'(t),\vec{u}(t)\right)=0$$

Mais : $\det\left(\vec{u}'(t),\vec{u}(t)\right)=\begin{vmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ \sin(t) & d-\cos(t)\end{vmatrix}=d\cos(t)-\cos^2(t)-\sin^2(t)=d\cos(t)-1$

Si $|d|<1$ alors $|d\cos(t)|=|d|\times|\cos(t)|<|\cos(t)|\leqslant 1$ soit $|d\cos(t)|<1$ donc $d\cos(t)-1\neq 0$

Ainsi : $\lambda(t)=-\frac{1}{d\cos(t)-1}\det\left(\frac{d\overrightarrow{OA}(t)}{dt},\vec{u}(t)\right)=-\frac{1}{d\cos(t)-1}\begin{vmatrix} -\frac{\sin(t)}{2} & \sin(t) \\ \frac{\cos(t)}{2} & d-\cos(t)\end{vmatrix}$

$$=-\frac{1}{d\cos(t)-1}\times\left(-\frac{d\sin(t)}{2}+\frac{1}{2}\sin(t)\cos(t)-\frac{1}{2}\cos(t)\sin(t)\right)$$

$$=\frac{d\sin(t)}{2(d\cos(t)-1)}$$

Finalement : $\overrightarrow{OP}(t)=\overrightarrow{OA(t)}+\lambda(t)\vec{u}(t)=\begin{pmatrix} \frac{d+\cos(t)}{2} \\ \frac{\sin(t)}{2}\end{pmatrix}+\frac{d\sin(t)}{2(d\cos(t)-1)}\begin{pmatrix} \sin(t) \\ d-\cos(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t)\end{pmatrix}$

avec : $x(t)=\frac{d^2\cos(t)-d+d\cos^2(t)-\cos(t)+d\sin^2(t)}{2(d\cos(t)-1)}=\frac{(d^2-1)\cos(t)}{2(d\cos(t)-1)}$

et : $y(t)=\frac{d\sin(t)\cos(t)-\sin(t)+d^2\sin(t)-d\sin(t)\cos(t)}{2(d\cos(t)-1)}=\frac{(d^2-1)\sin(t)}{2(d\cos(t)-1)}$