

EXERCICE N° 3/2 On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$

1. Prouver que, pour tout entier naturel n , $u_n > 0$

On prouve le résultat par récurrence avec l'hypothèse $HR_n : « u_n > 0 »$

Initialisation : On sait que $u_0 = 1 > 0$ donc HR_0 est vraie.

Hérédité : On prouve l'implication $HR_n \Rightarrow HR_{n+1}$

On sait donc que HR_n est vraie soit que $u_n > 0$ et on prouve que HR_{n+1} est vraie aussi soit que $u_{n+1} > 0$

$$\text{En effet : } u_{n+1} = \underbrace{u_n}_{>0} \times \underbrace{e^{-u_n}}_{>0} > 0$$

Conclusion : Par récurrence simple, on sait que HR_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ soit $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0}$

2. Démontrer que la suite (u_n) converge et préciser sa limite.

Comme $u_n > 0$ alors $u_n \neq 0$ et : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{-u_n} \leq 1$ (puisque $u_n > 0 \Rightarrow -u_n < 0 \Rightarrow e^{-u_n} < 1$)

Mais : $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1 \Rightarrow u_{n+1} \leq u_n$ puisque $u_n > 0$ donc l'inégalité ne change pas aussi la suite (u_n) est décroissante.

Dés lors, la suite (u_n) est décroissante et minorée (par 0) donc elle converge vers un réel $\ell \geq 0$

En passant à la limite dans la relation $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$ on a :

$$\ell = \ell e^{-\ell} \Leftrightarrow \ell(1 - e^{-\ell}) = 0 \Leftrightarrow \ell = 0 \text{ ou } e^{-\ell} = 1 = e^0 \Leftrightarrow \ell = 0 \text{ ou } -\ell = 0 \Leftrightarrow \ell = 0$$

Ainsi, $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ converge vers 0 lorsque } n \text{ tend vers } +\infty}$

3. Justifier que, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $\ln u_n = - \sum_{k=0}^{n-1} u_k$

Puisque $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut prendre le logarithme dans la relation $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$

Aussi : $\forall n \in \mathbb{N}, \ln u_{n+1} = \ln u_n + \ln e^{-u_n} \Rightarrow \ln u_{n+1} - \ln u_n = -u_n$ ou encore $\forall k \in \mathbb{N}, \ln u_{k+1} - \ln u_k = -u_k$

On somme alors, pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ si $n \in \mathbb{N}^*$: $\sum_{k=0}^{n-1} (\ln u_{k+1} - \ln u_k) = - \sum_{k=0}^{n-1} u_k$

Dans le premier membre, on reconnaît une somme télescopique aussi : $\ln u_{(n-1)+1} - \ln u_0 = - \sum_{k=0}^{n-1} u_k$

Mais, puisque $\ln u_0 = \ln 1 = 0$, on a bien : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln u_n = - \sum_{k=0}^{n-1} u_k}$

4. En déduire la nature de la série $\sum u_n$

D'après la question 2, on sait que $\sum u_n$ ne diverge pas grossièrement puisque $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

D'après la question 1, on sait que $\sum u_n$ est une série à termes positifs : on sait que la suite des sommes partielles de la série est croissante et que la série converge si cette suite est majorée.

D'après la question 3, si on note $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ la somme partielle d'ordre n de la série, on a, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^{n-1} u_k + u_n = -\ln u_n + u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \quad \text{par somme de limites usuelles } (u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ et } \ln u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty)$$

On en déduit que $\boxed{\text{la série } \sum u_n \text{ diverge}}$ puisque la suite de ses sommes partielles tend vers $+\infty$

EXERCICE N° 4 L'objectif de l'exercice est de calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} nx^n$ où $|x| < 1$

1. Justifier l'existence de la somme.

Si $x = 0$ la convergence est claire et la somme vaut 0.

Si $x \neq 0$: $nx^n \neq 0$ et $\frac{|(n+1)x^{n+1}|}{|nx^n|} = \frac{(n+1)}{n}|x| \sim 1 \times |x| < 1$ et, par la règle d'Alembert, $\sum nx^n$ converge (absolument)

Dans les deux cas, la convergence de la série justifie bien l'existence de la somme

2. Pour $|x| < 1$, calculer de deux façons $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right)^2$. Conclure.

Méthode 1 : on utilise la formule donnant la somme d'une série géométrique : $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right)^2 = \left(\frac{1}{1-x}\right)^2 = \frac{1}{(1-x)^2}$

Méthode 2 : on utilise un produit de Cauchy de deux séries qui CVA : $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right)^2 = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right)$

Le produit de Cauchy des deux séries absolument convergentes $\sum a_n = \sum x^n$ et de $\sum a_n = \sum x^n$ a pour terme général

$$c_n = \sum_{k=0}^n x^k \cdot x^{n-k} = \sum_{k=0}^n x^n = x^n \times (n+1). \text{ D'après le cours sur le produit de Cauchy, on sait que } \sum c_n \text{ converge absolument et :}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right)^2 = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right)^2$$

Conclusion : On a donc obtenu : $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right)^2 = \frac{1}{(1-x)^2}$. On peut en déduire $\sum_{n=0}^{+\infty} nx^n$

$$\text{Méthode } n^0 1 : \sum_{n=0}^{+\infty} nx^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1-1)x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{1-x} = \frac{1-(1-x)}{(1-x)^2} = \frac{x}{(1-x)^2}$$

(On peut scinder les sommes car on sait au moins que 2 séries sur les 3 convergent.)

Méthode $n^0 2$: On pose $n = k+1$ dans $\sum_{n=0}^{+\infty} nx^n$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} nx^n = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^n = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)x^{k+1} = x \times \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)x^k = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Le terme $n=0$ n'est en fait pas présent dans la somme, ce qui permet que le changement d'indice en k commence à $k=0$ et pas $k=-1$!

3. Pour $|x| < 1$ et $N \in \mathbb{N}$, que vaut $\sum_{n=0}^N x^n$? En déduire la valeur de $\sum_{n=0}^N nx^n$. Conclure.

Cette question propose une autre méthode...qu'on retrouvera lorsqu'on travaillera les séries entières.

Pour tout $N \in \mathbb{N}$ et $x \in]-1, 1[$: $\sum_{n=0}^N x^n = \frac{1-x^{N+1}}{1-x}$. En dérivant dans chaque membre cette somme finie (possible car $x \in]-1, 1[$) :

$$\frac{d}{dx} \left(\sum_{n=0}^N x^n \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1-x^{N+1}}{1-x} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1-x} - x^{N+1} \times \frac{1}{1-x} \right) \Leftrightarrow \sum_{n=0}^N nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{(N+1)x^N(1-x) + x^{N+1}}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2} - x^N \times \frac{(N+1)(1-x) + x}{(1-x)^2}$$

$$\text{Aussi : } S_N = \sum_{n=0}^N nx^n = x \left(\sum_{n=0}^N nx^{n-1} \right) = \frac{x}{(1-x)^2} - x^{N+1} \times \frac{(N+1)(1-x) + x}{(1-x)^2} \text{ puis, pour } x \text{ est fixé dans }]-1, 1[\text{ et } N \rightarrow +\infty :$$

$$S_N \sim \frac{x}{(1-x)^2} \sim N \rightarrow +\infty - x^{N+1} \times \frac{N(1-x)}{(1-x)^2} \sim \frac{x}{1-x} \times \underbrace{N x^N}_{n \rightarrow +\infty} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0 \text{ soit : } \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(S_N - \frac{x}{(1-x)^2} \right) = 0 \Leftrightarrow \lim_{N \rightarrow +\infty} S_N = \frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} nx^n$$

car Nx^N est le terme général d'une série convergente (question 1)

EXERCICE N° 3 LE 3) ET LE 4)

Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ où : 3) $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{e^k(n-k)!}$ et 4) $u_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{e^k(n-k)!}$ si $n \geq 1$ et $u_0 = 0$

$u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{e^k} \times \frac{1}{(n-k)!} = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ aussi on reconnaît le terme général du produit de Cauchy des séries

$\sum a_n = \sum \frac{1}{e^n}$ et $\sum b_n = \sum \frac{1}{n!}$. Or, les deux séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent absolument donc $\sum u_n$ CVA et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{e^n} \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \right) = \frac{1}{1-\frac{1}{e}} \times e^1 = \frac{e^2}{e-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

A propos du produit de Cauchy : il arrive parfois que le terme général soit « proche » d'un produit de Cauchy aux bornes de la somme près. Il faut alors ruser pour utiliser le résultat du cours

En plus : 4) Justifier l'existence et calculer $\sum_{n=2}^{+\infty} v_n$ où $v_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{e^k(n-k)!}$

La somme ne va pas de 0 à n contrairement à la définition du produit de Cauchy donc on va ruser...

On pose $a_k = \begin{cases} \frac{1}{e^k} & \text{si } k \geq 1 \\ 0 & \text{si } k = 0 \end{cases}$ et $b_k = \begin{cases} \frac{1}{k!} & \text{si } k \geq 1 \\ 0 & \text{si } k = 0 \end{cases}$ ainsi $v_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ puisque $a_0 = 0$ et $b_{n-n} = b_0 = 0$

De plus, on peut définir $v_0 = a_0 b_0 = 0$ et $v_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0 = 0$. La série de terme général v_n est le produit de Cauchy des séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ qui sont absolument convergentes donc elle est aussi absolument convergente et on a :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} v_n = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n \right) = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \right) = \frac{1}{e} \times \frac{1}{1-\frac{1}{e}} \times (e^1 - e^0) = 1$$