PT : Correction du TD n° 2 sur le chapitre II

EXERCICE 2 Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

1. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on considère le sev $E_\lambda = \text{Ker}\,(f - \lambda id)$ où id est l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$
   Prouver que E_λ est un sev de $\mathbb{R}^3$ qui est stable par f.

   Il s'agit de prouver que E_λ est un sev stable par f soit que $f(E_\lambda) \subset E_\lambda$ ou encore que $\forall x \in E_\lambda,\ f(x) \in E_\lambda$
   On se donne : $x \in E_\lambda = \text{Ker}\,(f - \lambda id) \Leftrightarrow f(x) - \lambda x = 0_E \Leftrightarrow f(x) = \lambda x$
   On veut : $f(x) \in E_\lambda \Leftrightarrow f\big(f(x)\big) - \lambda f(x) = 0_{\mathbb{R}^3}$
   Prouvons le : $f\big(f(x)\big) - \lambda f(x) =_{\text{car } f(x) = \lambda x} f(\lambda x) - \lambda(\lambda x) =_{\text{car } f \text{ est linéaire}} \lambda f(x) - \lambda^2 x = \lambda(\lambda x) - \lambda^2 x = 0_{\mathbb{R}^3}$

2. Déterminer une base des sev E_1, E_2 et E_{-4}

   — (Méthode rang) $E_1 = \text{Ker}\,(A - I_3) = \text{Ker} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ est un sev de $\mathbb{R}^3$

   On remarque $C_1 + C_2 + C_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$ où C_i colonne i de $A - I_3$ et C_1 et C_3 non colinéaire donc $\text{rg}(A - I_3) = 2$
   Par le théorème du rang, $\dim E_1 = \dim \mathbb{R}^3 - \text{rg}(A - I_3) = 3 - 2 = 1$
   donc il nous suffit de trouver un vecteur de Ker $(A - I_3)$ pour avoir une base :

   $C_1 + C_2 + C_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow (A - I_3)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $\boxed{E_1 = \text{Vect}\big((1,1,1)\big) \text{ et } \mathscr{B}_1 = \big((1,1,1)\big) \text{ est une base de } E_1}$

   — (Méthode noyau) $E_2 = \text{Ker}\,(A - 2I_3) = \text{Ker} \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 3 & -4 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ est un sev de $\mathbb{R}^3$

   $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 2y - z = 0 \\ 3x - 4y = 0 \\ -2x + 2y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -2x + 2y = -\frac{x}{2} \\ y = \frac{3}{4}x \end{cases} \Leftrightarrow (x, y, z) = \frac{x}{4}(4, 3, -2)$ donc

   $\boxed{E_2 = \text{Vect}\big((4,3,-2)\big) \text{ et } \mathscr{B}_2 = \big((4,3,-2)\big) \text{ est une base de } E_2}$

   — $E_{-4} = \text{Ker}\,(A + 4I_3) = \text{Ker} \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ est un sev de $\mathbb{R}^3$

   $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 2y - z = 0 \\ 3x + 2y = 0 \\ -2x + 2y + 5z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 4x + 2y = x \\ y = -\frac{3}{2}x \\ -2x - 3x + 5x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y, z) = \frac{x}{2}(2, -3, 2)$ donc

   $\boxed{E_0 = \text{Vect}\big((2,-3,2)\big) \text{ et } \mathscr{B}_2 = \big((2,-3,2)\big) \text{ est une base de } E_{-4}}$

3. Prouver que E_1, E_2 et E_{-4} sont en somme directe

   Il s'agit de prouver que $0_E = 0_E + 0_E + 0_E$ est l'unique décomposition de 0_E dans $E_1 + E_2 + E_{-4}$
   Autrement dit : si $0_{\mathbb{R}^3} = x_1 + x_2 + x_{-4}$ où $x_i \in E_i$ alors on prouve : $x_1 = x_2 = x_{-4} = 0_E$
   On sait : $0_{\mathbb{R}^3} = x_1 + x_1 + x_{-4}$ notée relation (1) où : $x_1 \in E_1 = \text{Ker}\,(f - id) \Leftrightarrow f(x_1) = x_1$
   $x_2 \in E_2 = \text{Ker}\,(f - 2id) \Leftrightarrow f(x_2) = 2x_2$
   et : $x_{-4} \in E_{-4} = \text{Ker}\,(f + 4id) \Leftrightarrow f(x_{-4}) = -4x_{-4}$
   On veut : $x_1 = x_0 = x_{-1} = 0_{\mathbb{R}^3}$
   Prouvons le : Ici, on a 3 inconnues x_1, x_2 et x_{-4} et on dispose d'une équation (1) où ces inconnues sont liées.
   Pour espérer résoudre, on cherche deux autres équations en exploitant les propriétés de x_1, x_2 et x_{-4} qui font intervenir les images $f(x_1)$, $f(x_2)$ et $f(x_{-4})$. Il est donc naturel de composer par f dans la relation (1) pour faire intervenir ces images.
   $0_{\mathbb{R}^3} = x_1 + x_2 + x_{-4} \Rightarrow 0_{\mathbb{R}^3} = f(0_{\mathbb{R}^3}) = f(x_1) + f(x_2) + f(x_{-4}) = x_1 + 2x_2 - 4x_{-4}$ par linéarité de f
   $\Rightarrow 0_{\mathbb{R}^3} = x_1 + x_2 - 4x_{-4}$ notée relation (2) et,en composant à nouveau par f :
   $\Rightarrow 0_{\mathbb{R}^3} = f(x_1) + 2f(x_2) - 4f(x_{-4}) = x_1 + 4x_2 + 16x_{-4}$ notée relation (3)
   On obtient le système

   $$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_{-4} = 0_{\mathbb{R}^3} \\ x_1 + 2x_2 - 4x_{-4} = 0_{\mathbb{R}^3} \\ x_1 + 4x_2 + 16x_{-4} = 0_{\mathbb{R}^3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_{-4} = 0_{\mathbb{R}^3} \\ x_2 - 5x_{-4} = 0_{\mathbb{R}^3} \\ 3x_2 + 15x_{-4} = 0_{\mathbb{R}^3} \end{cases} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_{-4} = 0_{\mathbb{R}^3} \\ x_2 - 5x_{-4} = 0_{\mathbb{R}^3} \\ 10x_{-4} = 0_{\mathbb{R}^3} \end{cases} \underset{L_3 \leftarrow \frac{1}{3}L_3 - L_2}{\Leftrightarrow} x_1 = x_2 = x_{-4} = 0_{\mathbb{R}^3}$$

4. En déduire que $\mathbb{R}^3 = E_1 \oplus E_2 \oplus E_{-4}$

   Pour démontrer une égalité entre deux sev F et G, on peut procèder par double inclusion $F \subset G$ et $G \subset F$
   Toutefois, lorsqu'on sait que les sev sont de dimension finies, on peut remplacer l'une des inclusions
   par une égalité de dimension : $F = G \Leftrightarrow \begin{cases} F \subset G \\ \dim F = \dim G \end{cases}$
   — Les E_i étant des sev de $\mathbb{R}^3$, on a déjà : $E_1 \oplus E_2 \oplus E_{-4} \subset \mathbb{R}^3$
   — La somme étant directe : $\dim(E_1 \oplus E_2 \oplus E_{-4}) = \dim E_1 + \dim E_2 + \dim E_{-4} = 1 + 1 + 1 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$
   Alors $\begin{cases} E_1 \oplus E_2 \oplus E_{-4} \subset \mathbb{R}^3 \\ \dim(E_1 \oplus E_2 \oplus E_{-4}) = \dim(\mathbb{R}^3) \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{E_1 \oplus E_2 \oplus E_{-4} = \mathbb{R}^3}$

5. Déterminer une base adaptée à cette décomposition et donner la matrice de f dans cette base.

   Une base adaptée à cette décomposition est obtenue en réunissant des bases des différents sev.
   Si $\varepsilon_1 = (1,1,1)$, $\varepsilon_2 = (4,3,2)$ et $\varepsilon_3 = (2,-3,2)$ alors $\mathscr{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base adaptée à cette décomposition.
   La décomposition est $\mathbb{R}^3 = E_1 \oplus E_2 \oplus E_{-4}$ et on a bien $E_1 = \text{Vect}(\varepsilon_1)$, $E_2 = \text{Vect}(\varepsilon_2)$ et $E_{-4} = \text{Vect}(\varepsilon_3)$
   De plus, par définition de E_λ : $\begin{cases} f(\varepsilon_1) = \varepsilon_1 \\ f(\varepsilon_2) = 2\varepsilon_2 \\ f(\varepsilon_3) = -4\varepsilon_3 \end{cases} \Rightarrow \text{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \text{Mat}_{\mathscr{B}}\Big(f(\varepsilon_1), f(\varepsilon_2), f(\varepsilon_3)\Big) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$
   Attention ! On doit exprimer les coordonnées dans la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$
   $f(\varepsilon_1) = \varepsilon_1 = 1 \times \varepsilon_1 + 0 \times \varepsilon_2 + 0 \times \varepsilon_3$ de coordonnées $(1,0,0)$ donnant la première colonne de la matrice...