EXERCICE N° 2 On dispose de trois composants électriques numérotés de 1 à 3 donc la probabilité de fonctionnement est p_i et de fonctionnement totalement indépendant les uns des autres.
Donner la probabilité de fonctionnement du circuit lorsque

1. les composants sont disposés en série

On note C_i l'événement « le composant i fonctionne ». Dans le cas d'une disposition en série, le circuit fonctionnera si tous les composants fonctionnent autrement dit si $C_1 \cap C_2 \cap C_3$ est réalisé. Par indépendance mutuelle des événements C_i, on obtient $P(C_1 \cap C_2 \cap C_3) = P(C_1) \times P(C_2) \times P(C_3) = p_1 p_2 p_3$

2. les composants sont disposés en parallèle

Cette fois, le circuit fonctionne si l'un au moins des composants fonctionnent autrement dit si $C_1 \cup C_2 \cup C_3$ est réalisé.
Attention à ne pas confondre événements indépendants et événements incompatibles! L'indépendance des événements C_i nous permet seulement de transformer des événements d'intersection en produit de probabilités.
méthode n° 1 On utilise la formule bien connue donnant la probabilité d'une réunion : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$\begin{aligned}P\big(C_1 \cup C_2 \cup C_3\big) = P\Big(\big(C_1 \cup C_2\big) \cup C_3\Big) &= P\big(C_1 \cup C_2\big) + P(C_3) - P\Big(\big(C_1 \cup C_2\big) \cap C_3\Big)\\ &= P(C_1) + P(C_2) - P(C_1 \cap C_2) + P(C_3) - P\Big(\big(C_1 \cap C_3\big) \cup \big(C_2 \cap C_3\big)\Big)\\ &= p_1 + p_2 - p_1 \times p_2 + p_3 - \Big(P\big(C_1 \cap C_3\big) + P\big(C_2 \cap C_3\big) - P\big(\underbrace{C_1 \cap C_3 \cap C_2 \cap C_3}_{C_1 \cap C_2 \cap C_3}\big)\Big)\\ &= p_1 + p_2 + p_3 - p_1 p_2 - p_1 p_3 - p_2 p_3 + p_1 p_2 p_3\end{aligned}$$

méthode n° 2 On passe par l'événement complémentaire : $P(C_1 \cup C_2 \cup C_3) = 1 - P\big(\overline{C_1} \cap \overline{C_2} \cap \overline{C_3}\big)$
Les événements $\overline{C}_1$, $\overline{C}_2$ et $\overline{C}_3$ sont indépendants donc :
$P(C_1 \cup C_2 \cup C_3) = 1 - P(\overline{C}_1)P(\overline{C}_2)P(\overline{C}_3) = 1 - (1 - p_1)(1 - p_2)(1 - p_3) = p_1 + p_2 + p_3 - p_1 p_2 - p_1 p_3 - p_2 p_3 + p_1 p_2 p_3$

3. le circuit est mixte : le composant n°1 est disposé en série avec le sous-circuit constitué des composants 2 et 3 qui sont montés en parallèle

Cette fois le circuit fonctionne lorsque $C_1 \cap \big(C_2 \cup C_3\big)$ est réalisé.
Par mutuelle indépendance : C_1 et $C_2 \cup C_3$ sont indépendants donc
$P\Big(C_1 \cap \big(C_2 \cup C_3\big)\Big) = P(C_1) \times P\big(C_2 \cup C_3\big) = p_1 \times \Big(P(C_2) + P(C_3) - P\big(C_2 \cap C_3\big)\Big) = p_1\Big(p_2 + p_3 - p_2 p_3\Big)$

EXERCICE N° 3 On considère le jeu suivant : on dispose d'une urne qui contient initialement une boule blanche. On joue alors indéfiniment à pile ou face avec une pièce non équilibrée de sorte que la probabilité d'obtenir face est deux fois plus grosse que celle d'obtenir pile. A chaque fois qu'on obtient face, on ajoute une boule noire dans l'urne. Lorsqu'on obtient pile, on tire au hasard une boule de l'urne.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note E_n l'événement « on obtient pile pour la première fois au n ieme lancer ». Calculer $P(E_n)$

Tout d'abord, si on note p la probabilité d'avoir pile avec la pièce truquée, alors la probabilité d'obtenir face est $2p$. Or, les événements « obtenir pile sur un lancer de la pièce » et « obtenir face sur un lancer de la pièce » forment un système complet d'événements donc $p + 2p = 1 \Leftrightarrow p = \dfrac{1}{3}$

Ensuite, on introduit l'événement F_n « on obtient face au n ieme lancer » et on a donc : $P(F_n) = \dfrac{1}{3}$ et $P(\overline{F}_n) = \dfrac{1}{3}$
De plus, on peut exprimer l'événement E_n à l'aide de ces événements : $E_n = F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_{n-1} \cap \overline{F_n}$
Les différents lancers sont mutuellement indépendants aussi : $P(E_n) = P(F_1) \times P(F_2) \times \cdots \times P(F_{n-1}) \times P\big(\overline{F_n}\big)$

On a donc obtenu : $\boxed{P(E_n) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1} \times \dfrac{1}{3}}$

2. Démontrer qu'il est presque sûr qu'on tire une boule lors de ce jeu.

L' événement « on tirera forcément une boule lors de ce jeu » correspond à l'événement « l'un des lancers de pièces donnera pile » autrement dit que l'un des événements E_n soit réalisé. Il s'agit donc de calculer la probabilité de l'événement $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} E_n$
Par construction, les événements $(E_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont deux à deux incompatibles donc, par sigma-additivité :
$P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} E_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(E_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^n = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1 - 0}{1 - \frac{2}{3}} = 1$
L'événement $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} E_n$: « on tirera forcément une boule lors de ce jeu » est donc presque sûr.

3. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche lors de ce tirage?

D'après la question précédente, la famille $(E_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est un système quasi-complet d'événements. On peut donc utiliser la formule des probabilités totales qu'on applique sur l'événement B : « la boule tirée est blanche » : $P(B) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(E_n) \times P(B|E_n)$
Lorsque E_n se réalise, on a ajouté $n-1$ boules noires à la boule blanche initiale (une boule ajouté à chacune des réalisations de F_k pour $k \in [\![1, n-1)$ aussi il y a n boules dans l'urne et une seule est blanche donc $P(B|E_n) = \dfrac{1}{n}$
On calcule donc : $P(B) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1} \times \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{n} = \dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\left(\frac{2}{3}\right)^n}{n}$ où on identifie le DSE $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n} = -\ln(1 - x)$ pour $|x| < 1$
Ainsi : $P(B) = \dfrac{1}{2} \times -\ln\big(1 - \frac{2}{3}\big) = \boxed{\dfrac{\ln 3}{2} = P(B)}$