

EXERCICE N° 2

Réduire dans une base orthonormée les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

La matrice A est symétrique réelle donc, d'après le théorème spectral, elle est diagonalisable dans une base orthonormée.

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x & -2 & 1 \\ -2 & x & -1 \\ 1 & -1 & x+1 \end{vmatrix} =_{C_1 - C_1 + C_2} (x-2) \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & x & -1 \\ 0 & -1 & x+1 \end{vmatrix} =_{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} (x-2) \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & x+2 & -2 \\ 0 & -1 & x+1 \end{vmatrix}$$

En développant selon C_1 :

$$\chi_A(x) = (x-2) \times +((x+2)(x+1) - 2) = (x-2)(x^2 + 3x) = (x-2)x(x+3)$$

Aussi $\text{Sp}(A) = \{-3, 0, 2\}$ et tous les espaces propres sont de dimension 1 et orthogonaux deux à deux.

On précise $E_0 = \text{Ker}(A) = \text{Ker} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $E_2 = \text{Ker}(A - 2I_2) = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ en déterminant pour

chacun un vecteur non nul de ces espaces puisqu'ils sont de dimension 1 :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2y - z = 0 \\ 2x + z = 0 \\ -x + y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2y \\ x = -\frac{z}{2} = -y \\ y + y - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ d'où } E_0 = \text{Vect}(u) \text{ où } u = (-1, 1, 2)$$

Dans $A - 2I_3$, on remarque que $C_1 + C_2 = 0$ donc que $v = (1, 1, 0) \in E_2$ et $E_2 = \text{Vect}(v)$

$$\text{On sait } u \wedge v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ dirige } E_{-3} \text{ ou encore } E_{-3} = \text{Vect}(w) \text{ où } w = (-1, 1, -1)$$

La base $\mathcal{B} = \left(\frac{u}{\|u\|}, \frac{v}{\|v\|}, \frac{w}{\|w\|} \right)$ est une base orthonormée de diagonalisation de A de sorte que

$$P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \in O_3(\mathbb{R}) \text{ et } P^T A P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

B est symétrique réelle donc, d'après le théorème spectral, elle est diagonalisable dans une base orthonormée.

Elle est de rang 1 donc, d'après le théorème du rang, $\dim \text{Ker } B = 3 - 1 = 2$ et 0 est valeur propre de multiplicité 2.

On obtient la troisième valeur propre, notée λ , avec la trace : $0 + 0 + \lambda = \text{tr}(B) = 3 \Leftrightarrow \lambda = 3$ Ainsi :

$\text{Sp}(B) = \{0, 3\}$ avec $m(0) = 2$, $m(3) = 1$ et les sev propres $E_0 = \text{Ker}(B)$ et $E_3 = \text{Ker}(B - 3I_3)$ sont orthogonaux.

$$B - 3I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \text{ a la somme de ces colonnes nulles donc } u = (1, 1, 1) \in E_3$$

$$v = (1, -1, 0) \in E_0 \text{ puisque } u \cdot v = 0 \text{ et } E_0 = E_3^\perp \text{ et aussi } w = u \wedge v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \in E_0$$

La base $\mathcal{B} = \left(\frac{u}{\|u\|}, \frac{v}{\|v\|}, \frac{w}{\|w\|} \right)$ est alors une base orthonormée de diagonalisation de B de sorte que

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \in O_3(\mathbb{R}) \text{ et } P^T B P = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$