

EXERCICE N° 3 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note H_n la somme partielle d'ordre n de la série harmonique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$

1. Montrer que $H_n \sim \ln n$ On pourra utiliser une comparaison série-intégrale

$f = [t \mapsto \frac{1}{t}]$ est C^0 et décroissante sur $[1, +\infty[$ aussi :

- Pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [k, k+1]$: $\frac{1}{k} \geq \frac{1}{t} \Rightarrow \int_k^{k+1} \frac{dt}{k} \geq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \Rightarrow \frac{1}{k} \geq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t}$

- Pour $k \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$ et $t \in [k-1, k]$: $\frac{1}{k} \leq \frac{1}{t} \Rightarrow \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t}$

Alors, en sommant ces relations avec la relation de Chasles : $\int_1^{n+1} \frac{dt}{t} \leq H_n \leq 1 + \int_1^n \frac{dt}{t} \Leftrightarrow \ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln n$

En divisant par $\ln n$: $\frac{\ln n + \ln(1 + \frac{1}{n})}{\ln n} \leq \frac{H_n}{\ln n} \leq \frac{1}{\ln n} + 1 \Leftrightarrow 1 + \underbrace{\frac{1}{\ln n} \ln(1 + \frac{1}{n})}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0} \leq \frac{H_n}{\ln n} \leq \underbrace{\frac{1}{\ln n}}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0} + 1$

Aussi : $\frac{H_n}{\ln n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \Rightarrow \boxed{H_n \sim \ln n}$

2. En déduire le rayon de convergence de la série $\sum_{n \geq 1} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) x^n$

$\sum_{n \geq 1} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) x^n = \sum_{n \geq 1} H_n x^n$ a le même rayon de convergence que $\sum_{n \geq 1} (\ln n) x^n$

On détermine ce rayon avec la règle de d'Alembert : soit $u_n = (\ln n) x^n$ et $x \neq 0$

$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{\ln(n+1)}{\ln n} |x| = \frac{\ln n + \ln(1 + \frac{1}{n})}{\ln n} |x| = \underbrace{\left(1 + \frac{1}{\ln n} \ln(1 + \frac{1}{n})\right)}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1} |x| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} |x|$

Il y a CVA si $|x| < 1$ donc $R \geq 1$ et il y a DVG si $|x| > 1$ d'où $R \leq 1$ donc $\boxed{R = 1}$

3. En utilisant un produit de Cauchy, calculer la somme de la série $\sum_{n \geq 1} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) x^n$

$\sum_{n \geq 1} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right) x^n = \sum_{n \geq 1} \left(\sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} \times x^{n-k}\right)$ est un produit de Cauchy entre $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}$ et $\sum_{n \geq 0} x^n$ toutes les deux de rayons de

convergence 1 (avec terme constant à 0 pour la première). Si $|x| < 1$: $S(x) = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}\right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right) = (-\ln(1-x)) \times \frac{1}{1-x}$

EXERCICE N° 5 Justifier que $\left[f : x \mapsto \int_0^x \frac{1 - \cos t}{t^2} dt\right]$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$ et préciser les dérivées successives en 0.

On pose : $g(t) = \frac{1 - \cos t}{t^2}$ pour $t \neq 0$ dès lors g est continue sur $\mathbb{R}^*$ et se prolonge par continuité en 0 car :

$\frac{1 - \cos t}{t^2} \sim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{t^2}{2}}{t^2} \sim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{2}$ en posant $g(0) = \frac{1}{2}$. La fonction f est donc la primitive de g qui s'annule en 0.

Or, on sait que, pour $t \in \mathbb{R}$: $\cos t = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!}$ dès lors, si $t \neq 0$:

$g(t) = \frac{1 - \cos t}{t^2} = \frac{1}{t^2} \times \left(-\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{t^{2(n-1)}}{(2n)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k+2)!}$ en posant $k = n-1$

autrement dit g est développable en série entière avec un rayon de convergence $R = +\infty$ or on sait que la somme d'une série entière est C^∞ sur son intervalle de convergence donc on peut conclure que g est C^∞ sur $\mathbb{R}$. Par suite, sa primitive $\boxed{f \text{ est aussi } C^\infty \text{ sur } \mathbb{R}}$ et on sait aussi qu'elle est développable en série entière et qu'on peut obtenir le

développement en intégrant terme à terme celui de g soit : $f(x) = \underbrace{f(0)}_{=0} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+2)!} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+2)!} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$

Les coefficients du développement en série entières sont $\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ donnent donc les dérivées successives de f en 0.

Ainsi : $f^{(2k)}(0) = 0$ (car pas de coefficient d'indice paire) et $f^{(2k+1)}(0) = (2k+1)! \times \frac{(-1)^k}{(2k+2)!(2k+1)} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)(2k+2)}$

On considère la fonction f de la variable réelle x d'expression $f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} x^n$

1. Déterminer le domaine de définition de f

On reconnaît une somme de série entière $\sum_{n \geq 2} a_n x^n$ où $a_n = \frac{(-1)^n}{n(n-1)}$.

$|a_n| \sim \frac{1}{n^2}$ donc $\sum a_n x^n$ a le même rayon que $\sum n^{-2} x^n$ dont on sait qu'il vaut $R = 1$ et on sait que $f(x)$ existe sur $] -1, 1[$.

• Il reste à étudier la définition aux bords de ce domaine soit quand $x = \pm 1$ mais alors :

$|a_n x^n| = \frac{1}{n(n-1)} \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2}$ donc la série CVA par critère d'équivalence et $f(x)$ existe.

Conclusion : f est définie sur $[-1, 1]$

2. Pour $x \in] -1, 1[$, exprimer $f'(x)$ puis $f(x)$ à l'aide de fonctions usuelles.

Pour $x \in] -1, 1[$, en dérivant terme à terme : $f'(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n-1} x^{n-1} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k$

Or, on sait que, pour $x \in] -1, 1[$: $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$ aussi $f'(x) = \ln(1+x)$

Dés lors : $f(x) - \underbrace{f(0)}_{=0} = \int_0^x (\ln(1+t)) dt = [(1+t) \ln(1+t)]_0^x - \int_0^x 1 dt$ par IPP avec $\begin{cases} u'(t) = 1 & u(t) = 1+t \\ v(t) = \ln(1+t) & v'(t) = \frac{1}{1+t} \end{cases}$

alors : $f(x) = (1+x) \ln(1+x) - x$

3. En déduire la valeur de $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)}$

On sait que f est continue sur son domaine $[-1, 1]$ de définition donc :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} = f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} ((1+x) \ln(1+x) - x) = 2 \ln 2 - 1$$

$$\text{Remarque : } f(-1) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} \times (-1)^n = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)} = f(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^+} ((1+x) \ln(1+x) - x) = 1$$

$$\text{mais on pouvez obtenir ce résultat par somme télescopique : } \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)} = - \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1} \right) = -(0-1) = 1$$

Justifier l'existence et déterminer le développement en série entière en 0 de :

$$1) f(x) = \frac{2x}{1-2x^2+x^4} \quad 2) f(x) = \frac{1}{(1-x)(2+x)} \quad 3) f(x) = \frac{1}{1+x+x^2}$$

$$4) f(x) = \ln(x^2-5x+6) \quad 5) f(x) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) \quad 6) f(x) = e^x \sin x$$

1. On remarque que $f(x) = \frac{2x}{(1-x^2)^2} = \frac{2x}{(x^2-1)^2}$ soit $f = \frac{u'}{u^2} = \left(-\frac{1}{u}\right)'$ où $u(x) = x^2 - 1$

Or : $F(x) = -\frac{1}{u(x)} = \frac{1}{1-x^2}$ est DSE en 0 avec un rayon de convergence $R = 1$ avec $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (x^2)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}$

Par dérivation terme à terme, $f = F'$ est aussi DSE en 0 avec $R = 1$ et : $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (2n)x^{2n-1}$

2. On écrit (décomposition en éléments simples à faire) : $f(x) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{1-x} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2+x} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{1-x} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{1+\frac{x}{2}}$

On reconnaît des séries géométriques :

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \text{ pour } |x| < 1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{1+\frac{x}{2}} = \frac{1}{1-\left(-\frac{x}{2}\right)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{x}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{2^n} \text{ si } \left|-\frac{x}{2}\right| < 1 \Leftrightarrow |x| < 2$$

Aussi, si $|x| < 1$: $f(x) = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} x^n + \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n + (-1)^n}{3 \times 2^n} x^n$ (toute les sommes CVA si $|x| < 1 < 2$)

3. On sait que : $1+x+x^2 = \frac{1-x^3}{1-x}$ si $|x| < 1$ (somme partielle d'une série géométrique)

Aussi, si $|x| < 1$: $f(x) = \frac{1-x}{1-x^3} = (1-x) \times \frac{1}{1-x^3} = (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} (x^3)^n = (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} x^{3n}$ si $|x^3| < 1 \Leftrightarrow |x|^3 < 1 \Leftrightarrow |x| < 1$

Alors, si $|x| < 1$: $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{3n} - \sum_{n=0}^{+\infty} x^{3n+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ où $a_k = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 3n \\ -1 & \text{si } k = 3n+1 \\ 0 & \text{si } k = 3n+2 \end{cases}$

4. $f(x) = x^2 - 5x + 6 > 0$ au voisinage de 0 avec : $x^2 - 5x + 6 = (x-3)(x+2)$

$$f(x) = \ln((x-3)(x+2)) = \ln|x-3| + \ln|x+2| = \ln(3-x) + \ln(2-x) = \ln 3 + \ln\left(1-\frac{x}{3}\right) + \ln 2 + \ln\left(1-\frac{x}{2}\right)$$

Attention à l'existence des différents logarithme au voisinage de 0!

Pour $a > 0$, $\left[x \mapsto \ln\left(1-\frac{x}{a}\right)\right]$ est DSE sur $] -a, a[$ avec : $\ln\left(1-\frac{x}{a}\right) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{na^n}$ (changement de variables $u = \frac{x}{a}$ dans $\ln(1-u)$)

Par somme, f est DSE sur $] -R, R[$ où $R = \min(3, 2) = 2$ et :

$$f(x) = \ln 3 + \ln 2 - \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x^n}{n3^n} + \frac{x^n}{n2^n} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ avec } \begin{cases} a_0 = \ln 6 \\ a_n = -\frac{2^n + 3^n}{n6^n} \text{ si } n \geq 1 \end{cases}$$

5. Par composée de fonctions usuelles, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec :

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{1+u^2(x)} \text{ où } u(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2} \text{ soit } u'(x) = \frac{-2x(1+x^2) - 2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{-4x}{(1+x^2)^2} \text{ aussi}$$

$$f'(x) = \frac{-4x}{(1+x^2)^2} = \frac{-4x}{1+2x^2+x^4+1-2x^2+x^4} = \frac{-4x}{2+2x^4} = \frac{-2x}{1+x^4} = -2x \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (x^4)^n \text{ pour } |x^4| < 1 \Leftrightarrow |x| < 1$$

f' est DSE sur $] -1, 1[$ avec $f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} 2 \times x^{4n+1}$ donc f aussi et :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} 2 \times \frac{x^{4n+2}}{4n+2} + k \text{ avec } k = f(0) = \operatorname{Arctan} 1 = \frac{\pi}{4} \text{ soit } f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{4n+2}}{2n+1}$$

6. Par produit de Cauchy de série entière de rayon de convergence $R = +\infty$, f est DSE avec $R = +\infty$.

Par ailleurs : $f(x) = \Im m(e^x e^{ix}) = \Im m(e^{(1+i)x}) = \Im m\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(1+i)^n}{n!} x^n\right)$ Or : $(1+i)^n = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^n = (\sqrt{2})^n e^{i\frac{n\pi}{4}}$

$$\text{Aussi : } f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\sqrt{2})^n}{n!} \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) x^n$$