

EXERCICE N° 1 Étudier l'allure au voisinage du point stationnaire de la courbe  $\Gamma$  dans les cas suivant

$$1. \Gamma : \begin{cases} x(t) = \ln(1+t^3) \\ y(t) = t^3 - \frac{t^6}{2} \end{cases}, t \in ]-1, 1[$$

$x$  et  $y$  sont  $C^\infty$  sur  $] -1, 1[$  (puisque  $-1 < t < 1 \Rightarrow -1 < t^3 < 1 \Rightarrow 1 + t^3 > 0$  par croissance de la fonction cube)

De plus : 
$$\begin{cases} x'(t) = \frac{3t^2}{1+t^3} \\ y'(t) = 3t^2 - 3t^5 \end{cases} \quad \text{aussi} \quad x'(t) = 0 \Leftrightarrow 3t^2 = 0 \Leftrightarrow t = 0 \text{ et on a bien } y'(0) = 0$$

Il y a un unique point stationnaire pour  $t = 0$

Prenons le temps de la réflexion :  $x(t) \sim_0 t^3$  et  $y(t) \sim_0 t^3$  donc la première dérivée non nulle sera pour  $p = 3$   
Le terme suivant dans le DL de  $\ln(1+t^3)$  sera en  $(t^3)^2 = t^6$  et on a pas mieux dans  $y(t)$  donc on commence avec des DL à l'ordre 6 en espérant qu'il ne sera pas utile de devoir pousser l'ordre des DL

On sait que :  $x(t) = t^3 - \frac{(t^3)^2}{2} + o(t^6) = t^3 - \frac{t^6}{2} + o(t^6)$  aussi : 
$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t^3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t^6 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} o(t^6) \\ o(t^6) \end{pmatrix}$$

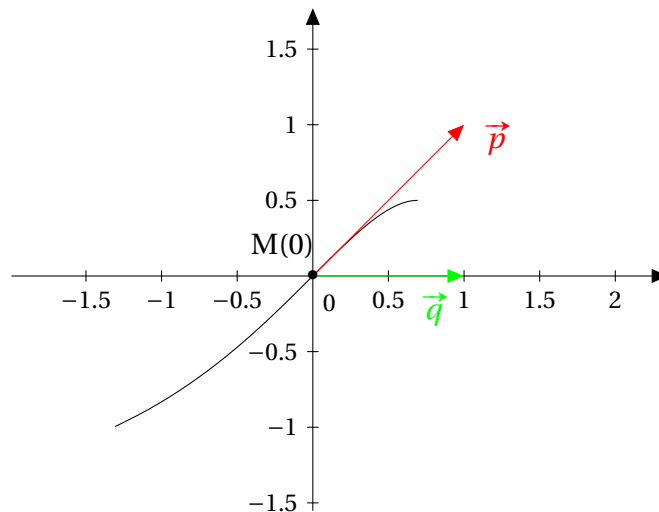
La première dérivée non nulle est obtenue pour  $p = 3$  et la tangente est dirigée par le vecteur  $\vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Par contre, pour obtenir la dérivée suivante non colinéaire, le DL précédent ne suffit pas car :  $\begin{vmatrix} 1 & -1/2 \\ 1 & -1/2 \end{vmatrix} = 0$

On doit donc pousser le DL à l'ordre suivant (ici en  $(t^3)^3 = t^9$ ) :  $x(t) = t^3 - \frac{t^6}{2} + \frac{t^9}{3} + o(t^9)$  et :

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t^3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t^6 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + t^9 \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} o(t^9) \\ o(t^9) \end{pmatrix}$$
 La dérivée suivante non colinéaire est obtenue pour  $q = 9$ .

Ainsi :  $p$  et  $q$  sont impairs et le point stationnaire est un point d'inflexion.



2.  $\Gamma: \begin{cases} x(t) = \cos(3t) \\ y(t) = \sin^3(t) \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

Recherche du domaine d'étude :

La fonction  $x$  est  $\frac{2\pi}{3}$  périodique et  $y$  est  $2\pi$  périodique aussi  $f$  où  $M(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$  est  $2\pi$  périodique (puisque  $x(t+2\pi) = x(t+3 \times 2\pi/3) = x(t)$ ). On peut limiter l'étude à un intervalle d'amplitude  $2\pi$   
 $x$  est paire et  $y$  est impaire donc les points  $M(t)$  et  $M(-t)$  sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.  
On obtient le tracé sur  $[-\pi, 0]$  à partir du tracé sur  $[0, \pi]$  et on peut limiter l'étude sur  $[0, \pi]$

Point stationnaire sur  $[0, \pi]$  :

$x$  et  $y$  sont  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  par produit et composition de fonctions  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .

$$x'(t) = -3\sin(3t) = 0 \Leftrightarrow 3t \equiv 0[\pi] \Leftrightarrow t \equiv 0\left[\frac{\pi}{3}\right] \Leftrightarrow t \in \left\{0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right\} \text{ sur } [0, \pi]$$

Or :  $y'(t) = 3 \times \cos t \times \sin^2 t$  (du type  $(u^3)' = 3 \times u' \times u^2$ ) et  $y'$  ne s'annule pas en  $\frac{\pi}{3}$  et en  $\frac{2\pi}{3}$  mais  $y'(0) = 0$   
Il y a un unique point stationnaire en  $t = 0$  à étudier sur  $[0, \pi]$

Par symétrie, on n'ajoute pas de point stationnaire sur  $[-\pi, 0]$  (Remarque : s'il y avait eu un point stationnaire en  $a \in ]0, \pi]$  alors il y en aurait eu un aussi en  $-a$ ...)

Par périodicité, ce point stationnaire est atteint une infinité de fois aux paramètres  $t = 2k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ )

Nature du point stationnaire :

Prenons le temps de la réflexions :  $y(t) \sim_0 t^3$  et  $x$  est paire avec un terme à l'ordre 2 (issue du DL de cosinus)

La première dérivée sera donc à l'ordre 2 et la dérivée suivante sera à l'ordre 3

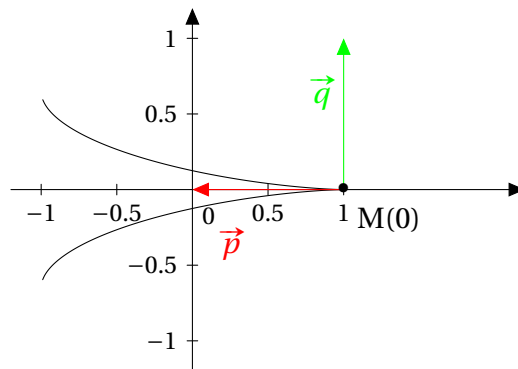
$$\text{On a : } x(t) = 1 - \frac{(3t)^2}{2} + o(t^3) = 1 - \frac{9}{2}t^2 + o(t^3) \text{ et } y(t) \sim_0 t^3 \Leftrightarrow y(t) = t^3 + o(t^3) \text{ d'où}$$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t^2 \begin{pmatrix} -\frac{9}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + t^3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} o(t^3) \\ o(t^3) \end{pmatrix}$$

La première dérivée non nulle est pour  $p = 2$  et la tangente est dirigée par  $\vec{p} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

La dérivée suivante non colinéaire est pour  $q = 3$ .

Ainsi :  $p$  est pair et  $q$  est impair donc le point stationnaire est un point de rebroussement de 1er espèce



$$3. \Gamma: \begin{cases} x(t) = \frac{t^2 + 1}{2t} \\ y(t) = \frac{2t-1}{t^2} \end{cases}, t \in ]0, +\infty[$$

$x$  et  $y$  sont  $C^\infty$  sur  $]0, +\infty[$  par quotient puisque  $t \neq 0$  avec :

$$x'(t) = \frac{2t \times 2t - (t^2 + 1) \times 2}{(2t)^2} = \frac{2(t^2 - 1)}{(2t)^2} \quad \text{et} \quad y'(t) = \frac{2 \times t^2 - (2t - 1) \times 2t}{t^4} = \frac{2t(1 - t)}{t^4}$$

$$\text{Ainsi : } \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow t = 1 \quad (\text{seul zéro commun à } x' \text{ et } y')$$

Pour étudier le point stationnaire, on va réaliser des DL en  $t = 1$  de sorte qu'on commence par ramener le problème en 0 en posant  $t = 1 + h$ .

On commence par rechercher un DL3 (point stationnaire donc pas d'ordre 1 et on espère le cas le plus favorable  $p = 2$  et  $q = 3$ ) mais il faudra peut être pousser le DL

$$x(1+h) = \frac{(1+h)^2 + 1}{2(1+h)} = \frac{1}{2}(2+2h+h^2) \times \frac{1}{1+h} = (1+h+\frac{1}{2}h^2)\left(1-h+h^2-h^3+o(h^3)\right)$$

$$\text{Aussi : } x(1+h) = 1 + \underbrace{(-1+1)}_{=0 \text{ OUF!}} h + (1-1+\frac{1}{2})h^2 + (-1+1-\frac{1}{2})h^3 + o(h^3) = 1 + \frac{1}{2}h^2 - \frac{1}{2}h^3 + o(h^3)$$

$$y(1+h) = \frac{2+2h-1}{(1+h)^2} = (1+2h)(1+h)^{-2} = (1+2h)\left(1-2h+\frac{(-2)(-3)}{2}h^2+\frac{(-2)(-3)(-4)}{3!}h^3+o(h^3)\right)$$

$$\text{Aussi : } y(1+h) = (1+2h)(1-2h+3h^2-4h^3+o(h^3)) = 1 + \underbrace{(-2+2)}_{=0 \text{ OUF!}} h + (3-4)h^2 + (-4+6)h^3 + o(h^3)$$

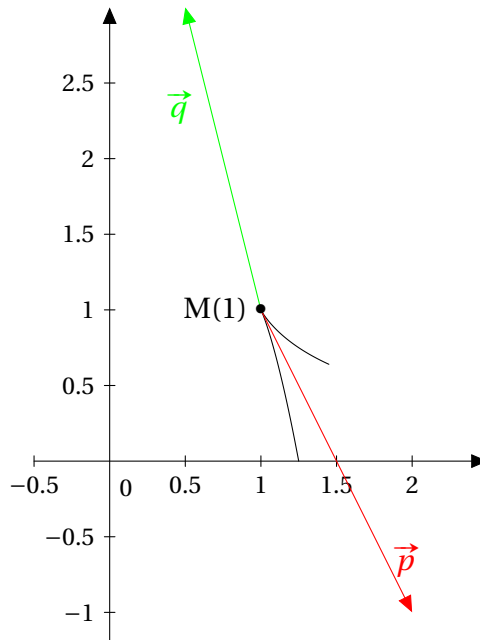
$$\text{soit : } y(1+h) = 1 - h^2 + 2h^3 + o(h^3)$$

$$\text{Finalement : } \begin{pmatrix} x(1+h) \\ y(1+h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + h^2 \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1 \end{pmatrix} + h^3 \begin{pmatrix} -1/2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} o(h^3) \\ o(h^3) \end{pmatrix} \quad \text{et : } \begin{vmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \neq 0 \text{ donc}$$

la première dérivées non nulle est obtenue pour  $p = 2$  et la tangente est dirigée par  $\vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

la dérivée suivante non colinéaire est obtenue pour  $q = 3$

Ainsi :  $p$  est pair et  $q$  est impair donc le point stationnaire est un point de rebroussement de 1er espèce



On donne ci-dessous le tableau de variation d'une courbe paramétrée  $f(t) = (x(t), y(t))$ .

On note  $M(t)$  le point de paramètre  $t$ .

|         |           |                              |                         |           |                              |                         |
|---------|-----------|------------------------------|-------------------------|-----------|------------------------------|-------------------------|
| $t$     | $-\infty$ | $-4$                         | $-1$                    | $0$       | $2$                          | $+\infty$               |
| $x'(t)$ | $-$       | $0$                          | $+$                     | $+$       | $0$                          | $-$                     |
| $x$     | $1$       | $\searrow$<br>$\frac{8}{9}$  | $\nearrow$<br>$+\infty$ | $-\infty$ | $\searrow$<br>$-\infty$      | $\nearrow$<br>$+\infty$ |
| $y$     | $+\infty$ | $\searrow$<br>$\frac{32}{3}$ | $\searrow$<br>$-\infty$ | $+\infty$ | $\searrow$<br>$\frac{16}{3}$ | $\nearrow$<br>$+\infty$ |
| $y'(t)$ | $-$       | $ $                          | $-$                     | $-$       | $0$                          | $+$                     |

1. Repérer les points où les tangentes sont parallèles aux axes et les points singuliers.

On repère une tangente verticale en  $M(-4)$  de coordonnées  $(\frac{8}{9}; \frac{32}{3})$  et un point singulier en  $M(0) = O(0, 0)$

2. Repérer les branches infinies. Identifier les asymptotes verticales et horizontales.

On repère 5 branches infinies :

- si  $t \rightarrow -\infty$ , il y a une asymptote verticale d'équation  $x = 1$
- si  $t \rightarrow 2$ , il y a une asymptote horizontale d'équation  $y = \frac{16}{3}$
- si  $t \rightarrow +\infty$ , il y a une asymptote verticale d'équation  $x = 1$

3. Ce tableau est celui de la courbe donnée à l'exemple 7 avec  $x(t) = \frac{t^2}{(t+1)(t-2)}$  et  $y(t) = \frac{t^2(t+2)}{t+1}$

L'étude des branches infinies a été faite à cette occasion : vos réponses sont-elles cohérentes avec cette étude?

Rappeler l'équation de l'asymptote oblique de cette courbe.

La branche infinie en  $t \rightarrow -1^\pm$  est une asymptote oblique d'équation  $y = -3x + \frac{2}{3}$ .

Pour la position de la courbe par rapport à l'asymptote :

$$y(t) + 3x(t) - \frac{2}{3} = \frac{t^2(t+2)}{t+1} + \frac{3t^2}{(t+1)(t-2)} - \frac{2}{3} = \frac{1}{3(t+1)(t-2)} \left( \underbrace{3t^2(t+2)(t-2) + 9t^2}_{3t^2(t^2-4+3)=3t^2(t^2-1)} - 2(t+1)(t-2) \right)$$

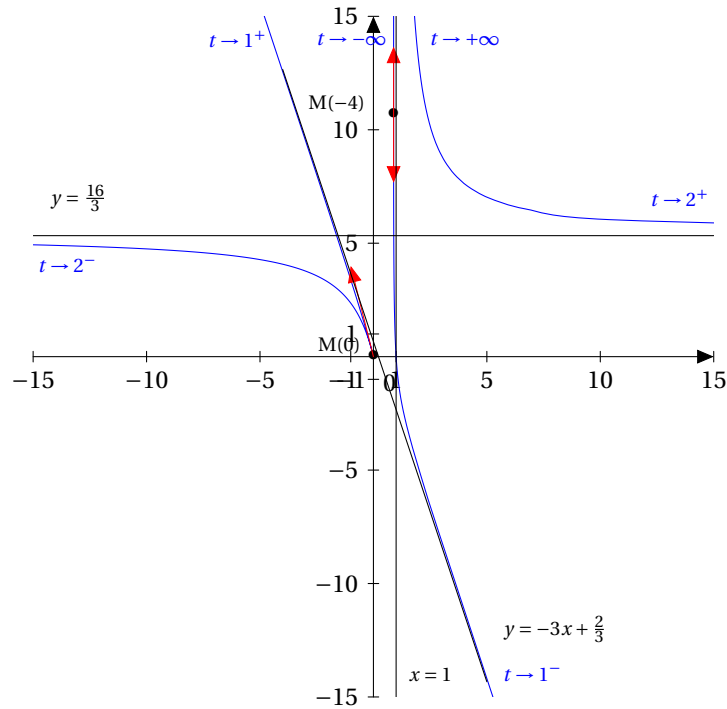
$$y(t) + 3x(t) - \frac{2}{3} = \frac{(t+1)}{3(t+1)(t-2)} (3t^2(t-1) - 2(t-2)) \quad \text{or} \quad 3t^3 - 3t^2 - 2t + 4 = (t+1)(3t^2 - 6t + 4)$$

$$\text{donc : } y(t) + 3x(t) - \frac{2}{3} = \frac{(t+1)^2(3t^2 - 6t + 4)}{3(t+1)(t-2)} \sim_{t \rightarrow -1} \frac{(t+1) \times 13}{-9} \text{ a le signe opposé à } t+1 \text{ au voisinage de } -1$$

La courbe est donc au dessus de l'asymptote lorsque  $t \rightarrow -1$  avec  $t < -1$  et au dessous de l'asymptote lorsque  $t \rightarrow -1$  avec  $t > -1$

Remarque : vous pouvez aussi vérifier que, en 0,  $y(-1+h) + 3x(-1+h) - \frac{2}{3} \sim_0 -\frac{13}{9}h$

4. Esquisser la courbe en sachant, de plus, que le point stationnaire est un point de rebroussement de seconde espèce avec une tangente de pente  $-4$ .



5. Justifier le signes des dérivées et les valeurs remarquables de ce tableau de variation.

— Il est clair que la courbe est définie sur  $] -\infty, -1[ \cup ] -1, 2[ \cup ] 2, +\infty[ = D$   
 —  $x$  et  $y$  sont des fractions rationnelles donc de classe  $C^\infty$  sur  $D$   
 —  $\forall t \in D, \quad x'(t) = \frac{2t(t+1)(t-2) - t^2 \times (t-2+t+1)}{(t+1)^2(t-2)^2} = \frac{-t^2-4t}{(t+1)^2(t-2)^2} = \frac{-t(t+4)}{(t+1)^2(t-2)^2}$   
 donc  $x'(t)$  a le signe et les zéros de  $-t(t+4)$  soit :  $x'(t) = 0 \Leftrightarrow t \in \{-4, 0\}$  et  $x'(t) > 0 \Leftrightarrow t \in ]-4, 0[$   
 —  $\forall t \in D, \quad y'(t) = \frac{(2t(t+2) + t^2)(t+1) - t^2(t+2)}{(t+1)^2} = \frac{t(2t^2+5t+4)}{(t+1)^2}$   
 Comme  $2t^2+5t+4 > 0$  ( $\Delta < 0$ ),  $y'(t)$  a le signe et les zéros de  $t$  soit :  $y'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$  et  $y'(t) > 0 \Leftrightarrow t > 0$   
 — On vérifie également les valeurs :  $x(-4) = \frac{16}{-3 \times -6} = \frac{8}{9}$ ,  $x(0) = 0$ ,  $y(-4) = \frac{-32}{-3} = \frac{32}{3}$ ,  $y(0) = 0$  et  $y(2) = \frac{16}{3}$

6. Justifier la nature du point singulier en utilisant un  $DL_4$  de  $f$

On réalise un  $DL_3(0)$  de  $x$  et  $y$  :

$$x(t) = \frac{t^2}{(t+1)(t+2)} = -\frac{t^2}{2} \times \frac{1}{1+t} \times \frac{1}{1-\frac{t}{2}} = -\frac{t^2}{2} \left(1 - t + t^2 + o(t)\right) \left(1 + \frac{t}{2} + \frac{t^2}{4} + o(t)\right) = -\frac{t^2}{2} \left(1 - \frac{t}{2} + \frac{3}{4}t^2 + o(t)\right)$$

$$\text{Ainsi : } x(t) = -\frac{t^2}{2} + \frac{1}{4}t^3 - \frac{3}{8}t^4 + o(t^3) \quad \text{et} \quad y(t) = t^2(t+2) \times \frac{1}{1+t} = (t^3+2t^2) \left(1 - t + t^2 + o(t)\right) = 2t^2 - t^3 + t^4 + o(t^3)$$

$$\text{aussi } f(t) = \frac{t^2}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{t^3}{6} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} + \frac{t^4}{4!} \begin{pmatrix} -9 \\ 24 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} o(t^3) \\ o(t^3) \end{pmatrix}$$

Ainsi, la première dérivée non nulle  $f''(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$  aussi  $p = 2$ . La tangente a pour pente  $-4$

$f^{(3)}(0)$  est colinéaire à  $f''(0)$  mais  $f^{(4)}(0)$  n'est pas colinéaire à  $f''(0)$  donc  $q = 4$  :  
 il s'agit d'un point de rebroussement de première espèce.