

Démontrer une équivalence ou une implication

- Une proposition écrite en « Si PropositionA alors PropositionB » se traduit par une implication logique : PropositionA $\Rightarrow$ PropositionB
On dit alors que : la PropositionA est une condition suffisante pour obtenir la PropositionB
ou que : la PropositionB est une condition nécessaire pour la PropositionA
Pour la démontrer, on suppose vraie la PropositionA et on démontre qu'alors la PropositionB est vraie.
Je vous conseille, dans un premier temps, de respecter un schéma de preuve en :
Je sais PropositionA en explicitant, en langage mathématique, les définitions et symboles utilisés dans la proposition
Je veux PropositionB en explicitant, en langage mathématique, les définitions et symboles utilisés dans la proposition
Je prouve ou on explicite le raisonnement logique conduisant à obtenir la vérité de la PropositionB à l'aide de la PropositionA
- Une proposition écrite en « PropositionA si et seulement si PropositionB » se traduit par une équivalence logique : PropositionA $\Leftrightarrow$ PropositionB
On dit alors que : la PropositionA est une condition nécessaire et suffisante pour la PropositionB (et réciproquement). Pour démontrer une équivalence, on procède, en général, en deux temps en démontrant les deux implications $\Rightarrow$ et $\Leftarrow$

EXEMPLE N°6 On considère les applications f et g données par :

$$1. f \in \mathcal{L}(M_2(\mathbb{R}), \mathbb{R}_2[X]) \text{ canoniquement associé à la matrice } A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

- (a) Préciser $f(l_2)$ où l_2 est la matrice identité.

On note $\mathcal{B} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ la base canonique de $E = M_2(\mathbb{R})$ et $\mathcal{C} = (1, X, X^2)$ celle de $\mathbb{R}_2[X]$ alors

$$A = \text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}(f) = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(f(E_{11}), f(E_{12}), f(E_{21}), f(E_{22}))$$

$$\text{Méthode 1 : } l_2 = E_{11} + E_{22} \Rightarrow f(l_2) = f(E_{11}) + f(E_{22}) = 2(1 + X + X^2) + 3(1 + X + X^2) = 5(1 + X + X^2)$$

$$\text{Méthode 2 : } l_2 \text{ a pour coordonnée } X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ d'où } f(l_2) \text{ a pour coordonnées } Y = AX = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{soit } f(l_2) = 5 \times 1 + 5 \times X + 5 \times X^2$$

- (b) Préciser le noyau et l'image de f .

Notons C_j la colonne j de A : $C_2 = 0$ et $C_1 = C_2$ et $5C_1 = 2C_4$ aussi :

$$\text{Im } A = \text{Vect}(C_1, C_2, C_3, C_4) = \text{Vect}((1, 1, 1))$$

par suite $\text{rg}(A) = 1 = \dim \text{Im } A = \dim \text{Im } f$ et on déduit $\text{Im } f$, via la base $\mathcal{C} = (1, X, X^2)$:

$$\text{Im } A = \text{Vect}((1, 1, 1)) \Leftrightarrow \text{Im } f = \text{Vect}(1 + X + X^2)$$

Par le théorème du rang, $\dim \text{Ker } f = \dim M_2(\mathbb{R}) - \text{rg}(f) = 4 - 1 = 3$

On cherche donc trois vecteurs linéairement indépendants dans $\text{Ker } f$ en s'aidant de vecteurs de $\text{Ker } A$

qu'on exprime ensuite via la base $\mathcal{B} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$.

$$C_2 = 0 \Leftrightarrow (0, 1, 0, 0) \in \text{Ker } A \Leftrightarrow E_{12} \in \text{Ker } f, \quad C_1 - C_3 = 0 \Leftrightarrow (1, 0, -1, 0) \in \text{Ker } A \Leftrightarrow E_{11} - E_{21} \in \text{Ker } f$$

$$\text{et enfin : } 5C_1 - 2C_4 = 0 \Leftrightarrow (5, 0, 0, -2) \in \text{Ker } A \Leftrightarrow 5E_{11} - 2E_{22} \in \text{Ker } f$$

$$\text{Ainsi : } M_1 = E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, M_2 = E_{11} - E_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } M_3 = 5E_{11} - 2E_{22} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ sont dans } \text{Ker } f \text{ et}$$

$$\text{on vérifie facilement : } \forall (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3, \alpha M_1 + \beta M_2 + \gamma M_3 = O_{22} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \beta + 5\gamma & \alpha \\ -\beta & -2\gamma \end{pmatrix} = O_{22} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

$$\text{de sorte qu'on peut conclure : } \boxed{\text{Ker } f = \text{Vect}(M_1, M_2, M_3)}$$

$$2. g \text{ est définie sur } \mathbb{C} \text{ par } g(a + ib) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ où } (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

- (a) montrer que $g \in \mathcal{L}(E, F)$ où on précisera les espaces vectoriels E et F et donner sa matrice dans les bases canoniques

Les espaces E et F doivent être sur le même corps $\mathbb{K}$ ici $F = M_2(\mathbb{R})$ d'où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $E = \mathbb{C}$ vu en temps que $\mathbb{R}\text{ev}$.
Pour $(a, b, a', b', \alpha) \in \mathbb{R}^5$, on vérifie : $g(\alpha(a + ib) + (a' + ib')) = \alpha g(a + ib) + g(a' + ib')$ (à faire))

La base canonique de E est $\mathcal{B} = (1, i)$ et celle de F est $\mathcal{C} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$

$$\text{On cherche } A = \text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}(g) = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(g(1 + i \times 0), g(0 + i \times 1)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- (b) g est-elle injective? surjective?

$\dim \text{Im } g = \text{rg}(A) = 2$ (deux colonnes non colinéaires dans A) or $\text{Im } g \subset M_2(\mathbb{R})$ avec $\dim M_2(\mathbb{R}) = 4$ aussi $\text{Im } g \neq M_2(\mathbb{R})$ et g n'est pas surjective

Par le théorème du rang : $\dim \text{Ker } g = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) - \dim \text{Im } g = 2 - 2 = 0 \Rightarrow \text{Ker } g = \{0\}$ et donc g est injective

SUITE DE L'EXEMPLE 6

1. Proposer une base $\mathcal{B}'$ de $M_2(\mathbb{R})$ et une base $\mathcal{C}'$ de $\mathbb{R}_2[X]$ pour lesquelles la matrice de f relative à ces bases sera

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Analyse : Notons $\mathcal{B}' = (A_1, A_2, A_3, A_4)$ base de $M_2(\mathbb{R})$ et $\mathcal{C}' = (P_1, P_2, P_3)$ base de $\mathbb{R}_2[X]$ qui répondent à la question.

Par définition : $A' = \text{Mat}_{\mathcal{C}'}(f(A_1), f(A_2), f(A_3), f(A_4))$ entraîne $f(A_1) = 0 = f(A_2) = f(A_3)$ et $f(A_4) = P_1$
Aussi : A_1, A_2 et A_3 sont dans $\text{Ker } f$ et sont linéairement indépendants (car vecteurs de la base $\mathcal{B}'$)
or $\dim \text{Ker } f = 3$ donc (A_1, A_2, A_3) est une base de $\text{Ker } f$: on peut donc prendre $A_1 = M_1, A_2 = M_2$ et $A_3 = M_3$.

De plus : $P_1 = f(A_4) \in \text{Im } f$ or $\text{Im } f = \text{Vect}(2 + X + X^2) = \text{Vect}(2 + 2X + 2X^2) = f(E_{11})$ d'après la

matrice A de f . Aussi on peut prendre $P_1 = 2 + 2X + 2X^2 = f(E_{11})$ avec $A_4 = E_{11}$

Il reste à compléter (P_1) en une base de $\mathbb{R}_2[X]$ qui est de dimension 3 avec deux polynômes P_2 et P_3 de sorte

que (P_1, P_2, P_3) est libre : il suffit d'utiliser des polynômes de degrés distincts. Par exemple : $P_2 = X$ et $P_3 = 1$

Synthèse : Il nous reste à vérifier que la famille (A_1, A_2, A_3, A_4) construite est libre car, puisqu'elle comporte

$4 = \dim M_2(\mathbb{R})$ vecteurs de $M_2(\mathbb{R})$, elle sera bien une base de $M_2(\mathbb{R})$ qui répond à la question.

$$\text{Or : } \forall (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4, \alpha A_1 + \beta A_2 + \gamma A_3 + \delta A_4 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \beta + 3\gamma + \delta & \alpha \\ -\beta & -2\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$$

2. Expliciter alors les matrices inversibles P et Q permettant de lier A et A' par une relation matricielle de changement de bases.

$$P = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(A) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(A_1, A_2, A_3, A_4) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad Q = \text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{C}'}(P_1, P_2, P_3) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La relation matricielle de changement de bases est : $A' = Q^{-1}AP$

3. Vérifier cette relation par le calcul matriciel.

$$\text{On précise } Q^{-1} : \begin{cases} P_1 = 2 + 2X + 2X^2 \\ P_2 = X \\ P_3 = 1 \end{cases} \text{ aussi } \begin{cases} 1 = P_3 \\ X = P_2 \\ X^2 = \frac{1}{2}P_1 - P_2 - P_3 \end{cases} \quad Q^{-1} = \text{Mat}_{\mathcal{C}', \mathcal{C}}(1, X, X^2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Par post-multiplication : } AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ puis } Q^{-1}(AP) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer un produit matriciel par POST ou PRE multiplication

Pour calculer les produits AB et BA avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, on peut utiliser une post/pré multiplication vu que la matrice B est "simple"

Pour calculer AB, on considère que B post-multiplie A donc on obtient le calcul de AB à l'aide d'opérations sur les colonnes C_1, C_2, C_3 de A en utilisant les coefficients des colonnes de B.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ où } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \times C_1 + 1 \times C_2 + 0 \times C_3 \text{ et } \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 1 \times C_1 + 0 \times C_2 + 1 \times C_3$$

Pour calculer BA, on considère que B pré-multiplie A donc on obtient le calcul de BA à l'aide d'opérations sur les lignes L_1, L_2 de A en utilisant les coefficients des lignes de B.

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \text{ où } \begin{cases} (2 & -1 & 4) = 1 \times L_1 + 1 \times L_2 \\ (1 & 0 & 1) = 1 \times L_1 + 0 \times L_2 \\ (1 & -1 & 3) = 0 \times L_1 + 1 \times L_2 \end{cases}$$

EXEMPLE N° 5 Noyau et image des matrices A, B et des produits AB et BA

La matrice A est associée à une application linéaire $f_A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$

Méthode n° 1 : on commence par rechercher le noyau avec $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Ker } A \Leftrightarrow A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ x - y + 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ aussi } \text{Ker } A = \text{Vect}\left(\underbrace{(-1, 2, 1)}_{\neq (0,0,0)}\right)$$

et $\dim \text{Ker } A = 1$. Le théorème du rang donne alors : $\dim \text{Im } A = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \text{Ker } A = 3 - 1 = 2$

$$\text{mais alors } \begin{cases} \text{Im } A \subset \mathbb{R}^2 \\ \dim \text{Im } A = 2 = \dim \mathbb{R}^2 \end{cases} \Rightarrow \text{Im } A = \mathbb{R}^2$$

Méthode n° 2 : on commence par rechercher l'image

$\text{Im } A = \text{Vect}(C_1, C_2, C_3)$ où C_j est la colonne j de A or $C_3 = C_1 - 2C_2$ donc $\text{Im } A = \text{Vect}(C_1, C_2)$ et C_1 et C_2 sont non colinéaires aussi $\text{rg}(A) = 2$ et $\begin{cases} \text{Im } A \subset \mathbb{R}^2 \\ \dim \text{Im } A = 2 = \dim \mathbb{R}^2 \end{cases} \Rightarrow \text{Im } A = \mathbb{R}^2$

Le théorème du rang donne alors : $\dim \text{Ker } A = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \mathfrak{S}A = 3 - 2 = 1$ et on obtient un vecteur de $\text{Ker } A$ avec

$$\text{la relation sur les colonnes : } C_1 - 2C_2 - C_3 = 0 \Leftrightarrow A \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (1, -2, -1) \in \text{Ker } A \text{ aussi } \text{Ker } A = \text{Vect}((1, -2, -1))$$

L'application $f_A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ est surjective non injective.

La matrice B est associée à une application linéaire $f_B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$.

Les deux colonnes de B sont non colinéaires donc elles forment une base de $\text{Im } B$ et $\text{Im } B = \text{Vect}((1, 1, 0), (1, 0, 1))$

De plus, $\text{rg}(B) = 2$ et le théorème du rang donne : $\dim \text{Ker } B = \dim \mathbb{R}^2 - \text{rg}(B) = 2 - 2 = 0 \Rightarrow \text{Ker } B = \{(0, 0)\}$

L'application $f_B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ est injective non surjective.

AB est associée à un endomorphisme $f_{AB} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$

$\text{rg}(AB) = 2$ (car les deux colonnes de AB sont non colinéaires) et, puisque AB est dans $M_2(\mathbb{R})$:

$$\text{rg}(AB) = 2 \Leftrightarrow AB \text{ est inversible} \Leftrightarrow \text{Ker } (AB) = \{(0, 0)\}$$

L'endomorphisme $f_{AB} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ est injectif et surjectif : c'est un automorphisme.

BA est associée à un endomorphisme $f_{BA} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$. Notons C_1, C_2 et C_3 ses colonnes,

on remarque que $C_1 - 2C_2 = C_3$ aussi $\text{Im } (BA) = \text{Vect}(C_1, C_2, C_3) = \text{Vect}(C_1, C_2)$ or C_1 et C_2 sont non colinéaires Aussi : $\text{rg}(BA) = 2$ et $\text{Im } (BA) = \text{Vect}(C_1, -C_2) = \text{Vect}((2, 1, 1), (1, 0, 1))$

Le théorème du rang donne : $\dim \text{Ker } (BA) = \dim(\mathbb{R}^3) - \text{rg}(BA) = 3 - 2 = 1$ et on obtient un vecteur de $\text{Ker } (BA)$ à l'aide de la relation trouvée sur les colonnes :

$$C_1 - 2C_2 - C_3 = 0 \Leftrightarrow BA \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (1, -2, -1) \in \text{Ker } (BA) \text{ aussi } \text{Ker } (BA) = \text{Vect}((1, -2, -1))$$

L'endomorphisme $f_{BA} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ n'est ni surjectif ni injectif.