

EXERCICE N° 2 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on munit $M_n(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique: $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^T B)$

1. Dans cette question, on suppose $n = 2$. On pose:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

a. Justifier que $\mathcal{B} = (M_1, M_2, M_3)$ est une base de $F = \text{Ker tr}$.

On sait que $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid a + d = 0 \right\}$ est caractérisé par l'équation linéaire $a + d = 0$ dans la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$ donc Ker tr est un hyperplan de $M_2(\mathbb{R})$: $\dim \text{Ker tr} = \dim M_2(\mathbb{R}) - 1 = 2^2 - 1$
On vérifie que M_1, M_2 et M_3 sont toutes de trace nulle donc (M_1, M_2, M_3) est une famille de F .

La famille $\mathcal{B}$ est une famille libre puisque:
$$\forall (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3, \quad \alpha M_1 + \beta M_2 + \gamma M_3 = O_{22} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ -\gamma \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

Alors: $\begin{cases} \mathcal{B} \text{ est donc une famille libre de } F \\ \text{Card}(\mathcal{B}) = 3 = \dim F \end{cases} \Rightarrow \boxed{\mathcal{B} \text{ est une base de } F}$

b. Construire alors une base orthonormée de F en s'appuyant sur la base $\mathcal{B}$.

On applique le procédé de Gram-Schmidt à $\mathcal{B}$. On rappelle que:

$$\left\langle \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \right\rangle = aa' + bb' + cc' + dd' \quad \text{et} \quad \left\| \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right\|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

On appellera (N_1, N_2, N_3) la base orthonormée issue de l'orthonormalisation de $\mathcal{B} = (M_1, M_2, M_3)$.

- $\|M_1\| = 1$ d'où $\boxed{N_1 = M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$
- $N_2 = \frac{U_2}{\|U_2\|}$ où $U_2 = M_2 - p_1(M_2)$ avec $p_1(M_2)$ projection orthogonal de M_2 sur $F_1 = \text{Vect}(M_1) = \text{Vect}(N_1)$

$$\text{où } (N_1) \text{ BON de } F_1 \text{ donc: } U_2 = M_2 - \langle M_2, N_1 \rangle N_1 = M_2 - 1 \times M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{N_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

- $N_3 = \frac{U_3}{\|U_3\|}$ où $U_3 = M_3 - p_2(M_3)$ avec $p_2(M_3)$ projection orthogonal de M_3 sur $F_2 = \text{Vect}(M_1, M_2)$
mais $F_2 = \text{Vect}(N_1, N_2)$ où (N_1, N_2) BON de F_2 donc:

$$U_3 = M_3 - (\langle M_3, N_1 \rangle N_1 + \langle M_3, N_2 \rangle N_2) = M_3 - 1 \times N_1 - 1 \times N_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ donc } \boxed{N_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

c. Déterminer la projection orthogonale de $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur F puis la distance de M à F .

Méthode 1: Puisqu'on connaît une BON (N_1, N_2, N_3) de F , la projection orthogonale $p(M)$ de M sur F est:
 $P(M) = \langle M, N_1 \rangle N_1 + \langle M, N_2 \rangle N_2 + \langle M, N_3 \rangle N_3 = 1 \times N_1 + 1 \times N_2 + 0 \times N_3$

Méthode 2: $A = p(M) \Leftrightarrow A \in F$ et $M - A \in F^\perp$ aussi avec $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, M - A = \begin{pmatrix} 1-a & 1-b \\ 1-c & 1-d \end{pmatrix}$

Sachant $F = \text{Ker}(\text{tr}) = \text{Vect}(M_1, M_2, M_3)$:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = p(M) \Leftrightarrow a + d = 0 \text{ et } \begin{cases} \langle M - A, M_1 \rangle = 0 \\ \langle M - A, M_2 \rangle = 0 \\ \langle M - A, M_3 \rangle = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a + d = 0 \text{ et } \begin{cases} 1 - c = 0 \\ 1 - b + 1 - c = 0 \\ 1 - a + 1 - b + 1 - c - (1 - d) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow a + d = 0 \text{ et } \begin{cases} c = 1 \\ b = 1 \\ a = d \end{cases} \Leftrightarrow c = b = 1 \text{ et } a = d = 0$$

Dans les deux cas, on trouve $\boxed{P(M) = N_1 + N_2 = M_2}$ aussi: $d(M, F) = \|M - P(M)\| = \|I_2\| = \boxed{\sqrt{2} = d(M, F)}$

2. Dans cette question, on revient au cas général où $n \in \mathbb{N}^*$ est quelconque.

a. Prouver que $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont des supplémentaires orthogonaux de $M_n(\mathbb{R})$.

Méthode: Comment montrer que F et G sont des supplémentaires orthogonaux dans $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$?

- on commence par vérifier que F et G sont des sev de E
- on vérifie ensuite que $F \perp G$ car cela entraîne $F \cap G = \{0_E\}$ et donc le caractère directe de la somme.
- Par i) et ii), on sait déjà: $F \oplus G \subset E$. Il s'agit donc:
soit de prouver: $E \subset F + G$ (par Analyse/Synthèse) soit, si $\dim E < +\infty$, d'établir $\dim F + \dim G = \dim E$

• On sait déjà que $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont des sev de $M_n(\mathbb{R})$ (c'est du cours)

• On vérifie que ces sev sont orthogonaux: soient $S \in S_n(\mathbb{R})$ et $A \in A_n(\mathbb{R})$ alors $S^T = S$ et $A^T = -A$
 $\langle S, A \rangle = \text{tr}(S^T A) = \text{tr}(SA)$ mais $\langle S, A \rangle = \langle A, S \rangle = \text{tr}(A^T S) = \text{tr}(-AS) = -\text{tr}(AS) = -\text{tr}(SA)$
 aussi: $2\langle S, A \rangle = \text{tr}(SA) + (-\text{tr}(SA)) = 0 \Rightarrow \langle S, A \rangle = 0$. Ainsi, $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont orthogonaux.

Ainsi, puisque c'est sev sont orthogonaux, on a: $S_n(\mathbb{R}) \cap A_n(\mathbb{R}) = \{O_{nn}\}$ et on a déjà: $S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R})$

• Analyse: Pour toute matrice M de $M_n(\mathbb{R})$, on cherche $S \in S_n(\mathbb{R})$ et $A \in A_n(\mathbb{R})$ avec:

$$M = S + A \text{ d'où } M^T = S - A \text{ et on trouve alors } S = \frac{M + M^T}{2} \text{ et } A = \frac{M - M^T}{2}$$

Synthèse: Pour $M \in M_n(\mathbb{R})$: $M = \frac{M + M^T}{2} + \frac{M - M^T}{2}$ et $S = \frac{M + M^T}{2} \in S_n(\mathbb{R})$ car $S^T = S$, $A = \frac{M - M^T}{2} \in A_n(\mathbb{R})$
 car $A^T = -A$ aussi $M \in S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$. Ainsi: $M_n(\mathbb{R}) \subset S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R})$ soit $S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R}) = M_n(\mathbb{R})$

Rappels PTSI: $\dim S_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\dim A_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n-1)}{2}$ donc $\dim S_n(\mathbb{R}) + \dim A_n(\mathbb{R}) = n^2 = \dim M_n(\mathbb{R})$

Si $(E_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ est la base canonique de $M_n(\mathbb{R})$,

$S = (s_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ une matrice symétrique, $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ est une matrice antisymétrique alors:

$$S = \underbrace{\sum_{i=1}^n s_{ii} E_{ii}}_{\text{coefficient diagonaux}} + \underbrace{\sum_{1 \leq i < j \leq n} s_{ij} (E_{ij} + E_{ji})}_{s_{ji} = s_{ij}} \text{ et } A = \underbrace{0}_{\text{coefficient diagonaux nuls}} + \underbrace{\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} (E_{ij} - E_{ji})}_{a_{ji} = -a_{ij}}$$

$S_n(\mathbb{R})$ est engendré par $\{E_{ii} \mid i \in \llbracket 1, n \rrbracket\} \cup \{E_{ij} + E_{ji} \mid 1 \leq i < j \leq n\}$ qui est clairement libre (il suffit d'écrire la définition)

donc on a une base de $S_n(\mathbb{R})$ et: $\dim S_n(\mathbb{R}) = n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$

(il faut connaître les n coefficients sur la diagonale et ceux au dessus de la diagonale soit $1 + 2 + \dots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$)

$A_n(\mathbb{R})$ engendré par $\{E_{ij} - E_{ji} \mid 1 \leq i < j \leq n\}$ libre donc on a une base de $A_n(\mathbb{R})$ et: $\dim A_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n-1)}{2}$

(il y a des zéros sur la diagonale et il suffit de connaître ceux au dessus de la diagonale soit $1 + 2 + \dots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$ coefficients)

b. Pour $M \in M_n(\mathbb{R})$, préciser le projeté orthogonal $P(M)$ de M sur $S_n(\mathbb{R})$ et $d(M, S_n(\mathbb{R}))$ en fonction de M.

Par définition, $S = \frac{M^T + M}{2} = P(M)$ est le projeté orthogonal de M sur $S_n(\mathbb{R})$.

$$\text{Aussi: } d(M, S_n(\mathbb{R})) = \|M - S\| = \left\| \frac{M - M^T}{2} \right\| = d(M, S_n(\mathbb{R})) \text{ et } P(M) = \frac{M + M^T}{2}$$

c. *Application*: Si $M = \sum_{i=1}^n E_{i1}$ où $(E_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ est la base canonique de $M_n(\mathbb{R})$, préciser $d(M, S_n(\mathbb{R}))$

Rappel: Dans $M_n(\mathbb{R})$, si $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ et $B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ alors

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^T B) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} b_{ij} \text{ d'où } \|A\| = \sqrt{\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij}^2}$$

M a une première colonne de 1 et des zéros ailleurs. M^T a donc une ligne de 1 et des zéros ailleurs.

$M - M^T$ a donc une première colonne de 1 et une première ligne de -1 sauf le coefficient (1, 1) qui vaut 0 et 0

ailleurs. Il y a $2(n-1)$ coefficients de carrés 1 aussi $\|M - M^T\| = \sqrt{2(n-1)}$ puis $d(M, S_n(\mathbb{R})) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{n-1}$

EXERCICE N° 3

Dans $\mathbb{R}^n$, déterminer la distance du vecteur $x = (1, 0, 0, \dots, 0)$ à $H = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1 - x_n = 0\}$

On travaille dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ munit du produit scalaire usuel.

H est caractérisée dans $\mathbb{R}^n$ par une équation linéaire $x_1 + x_n = 0$ non triviale où $(x_1, \dots, x_n)$ sont les coordonnées dans la base canonique. On peut donc conclure que H est un hyperplan de $\mathbb{R}^n$ autrement dit que $\dim H = n - 1$

On sait que $d(x, H) = \|x - p(x)\|$ où $p(x)$ est la projection orthogonale de x sur H . On détermine donc $p(x)$.

Rédaction n° 1

On sait que $p(x) = x - q(x)$ où $q(x)$ est la projection orthogonale de x sur $H^\perp$.

Or, $H^\perp$ est un sev de dimension 1 ($\dim H^\perp = \dim \mathbb{R}^n - \dim H = n - (n - 1) = 1$) et, puisqu'on connaît une équation de H dans la base canonique qui est une base orthonormée pour le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$:

$$H = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1 - x_n = 0\} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \vec{x} \cdot \vec{u} = 0\} \text{ où } \vec{u} = (1, 0, \dots, 0, -1) \text{ soit } H = \text{Vect}(\vec{u})^\perp \text{ et donc } H^\perp = \text{Vect}(\vec{u})$$

$$\text{Une base orthonormée de } H^\perp \text{ est : } \varepsilon_1 = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{u}$$

$$\text{Le projeté orthogonal de } x \text{ sur } H^\perp \text{ est donc } q(x) = (\vec{x} \cdot \varepsilon_1) \varepsilon_1 = \frac{1}{2} (x \cdot \vec{u}) \vec{u} = \frac{1}{2} \vec{u} = x - p(x)$$

$$\text{Enfin, la distance cherchée est } d(x, H) = \|x - p(x)\| = \|q(x)\| = \frac{1}{2} \|\vec{u}\| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Rédaction n° 2 On utilise la caractérisation du projeté orthogonal : $y = (y_1, \dots, y_n) = p(x) \Leftrightarrow \begin{cases} y \in F & (1) \\ x - y \in F^\perp & (2) \end{cases}$

(1) $\Leftrightarrow y_1 + y_n = 0$ puisqu'on connaît une équation de l'hyperplan H et : $\dim H^\perp = \dim \mathbb{R}^n - \dim H = n - (n - 1) = 1$
or $H = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1 + x_n = 0\} = \{(x_1, \dots, x_n) \mid \langle (x_1, \dots, x_n), (1, 0, \dots, 0, 1) \rangle = 0\} = \text{Vect}((1, 0, \dots, 0, 1))^\perp$

aussi $H^\perp = \text{Vect}((1, 0, \dots, 0, 1))$ de sorte que

$$(2) \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}, x - y = \alpha(1, 0, \dots, 0, 1) \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}, y = x - \alpha(1, 0, \dots, 0, 1) = (1 - \alpha, 0, \dots, -\alpha)$$

$$\text{Ainsi : } y = p(x) \Leftrightarrow \begin{cases} (1) \\ (2) \end{cases} \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}, y = 1 - \alpha, 0, \dots, -\alpha \text{ et } 1 - \alpha - \alpha = 0 \text{ donnant } \alpha = \frac{1}{2} \text{ et } p(x) = y = \left(\frac{1}{2}, 0, \dots, 0, -\frac{1}{2}\right)$$

$$\text{Fin du calcul en connaissant le projeté } p(x) : d(x, H) = \|x - p(x)\| = \left\| \left(\frac{1}{2}, 0, \dots, 0, \frac{1}{2}\right) \right\| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Rédaction n° 3 On détermine une base de H en choisissant $n - 1$ vecteurs de H linéairement indépendant : les vecteurs $u_1 = (1, 0, \dots, 0, -1)$ et, pour $i \in \llbracket 2, n - 1 \rrbracket$, $u_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ avec un seul 1 en i ème position sont tous dans H car vérifiant l'équation $x_1 + x_n = 0$ et on peut vérifier que $(u_1, \dots, u_{n-1})$ est libre car

$$\forall (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}, \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i u_i = (0, \dots, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \text{ (1er composante)} \\ \alpha_2 = 0 \text{ (2ème composante)} \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} = 0 \text{ ((n-1) ème composante)} \\ -\alpha_1 = 0 \text{ (n ème composante)} \end{cases} \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{n-1} = 0$$

$$\text{Ainsi : } \begin{cases} \text{Card}(u_1, \dots, u_{n-1}) = n - 1 = \dim H \\ (u_1, \dots, u_{n-1}) \text{ est libre} \end{cases} \Leftrightarrow (u_1, \dots, u_{n-1}) \text{ est une base de } H$$

On utilise alors la caractérisation de la projection orthogonale : $y = p(x) \Leftrightarrow \begin{cases} y \in H & (1) \\ x - y \in H^\perp & (2) \end{cases}$ avec :

$$(1) \Leftrightarrow \exists (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}, y = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i u_i = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, -\alpha_1) \text{ de sorte que } x - y = (1 - \alpha_1, -\alpha_2, \dots, -\alpha_{n-1}, \alpha_1)$$

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} \langle x - y, u_1 \rangle = 0 \\ \langle x - y, u_2 \rangle = 0 \\ \vdots \\ \langle x - y, u_{n-1} \rangle = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1 - \alpha_1) - \alpha_1 = 0 \\ -\alpha_2 = 0 \\ \vdots \\ -\alpha_{n-1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha_1 = \frac{1}{2}, \alpha_2 = \dots = \alpha_{n-1} = 0 \text{ donc } p(x) = \left(\frac{1}{2}, 0, \dots, 0, -\frac{1}{2}\right)$$

Rédaction n° 4 Comme avant, on choisit $n - 1$ vecteurs $(u_1, \dots, u_{n-1})$ dans H sauf qu'on remarque que $\langle u_i, u_j \rangle = 0$ si $i \neq j$ autrement dit $(u_1, \dots, u_{n-1})$ est une famille orthogonale (donc libre) de $n - 1$ vecteurs de H avec $\dim H = n - 1$ aussi $(u_1, \dots, u_{n-1})$ est une base orthogonale de H . Il est donc très facile d'obtenir une base orthonormée de H :

$$\left(\frac{u_i}{\|u_i\|} \right)_{1 \leq i \leq n-1} = \left(\frac{u_1}{\sqrt{2}}, u_2, \dots, u_{n-1} \right) \text{ est une BON de } H$$

$$\text{Alors : } p(x) = \left\langle x, \frac{u_1}{\sqrt{2}} \right\rangle \frac{u_1}{\sqrt{2}} + \sum_{i=2}^{n-1} \underbrace{\langle x, u_i \rangle}_{=0} u_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} (1, 0, \dots, -1) = \left(\frac{1}{2}, 0, \dots, 0, -\frac{1}{2}\right)$$