

PT : Correction du TD n° 1 sur le chapitre VIII

EXERCICE N° 1

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + xy) \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

1. Justifier la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$. (Question qui n'est pas un attendu du programme)

• Utilisation des théorèmes usuels

$[(x, y) \mapsto x]$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ (projection) d'où, par quotient, $[(x, y) \mapsto \frac{1}{x}]$ est continue sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ (plan privé de l'axe des ordonnées) où $x \neq 0$. En composant avec le sinus qui est continue sur $\mathbb{R}$, on obtient $[(x, y) \mapsto \sin \frac{1}{x}]$ continue sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$. Enfin, par produit avec la fonction polynômiale $[(x, y) \mapsto x^2 + xy]$, on conclut que f est continue sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ par les théorèmes usuels.

• Étude ponctuelle en $(0, y_0)$ où $y_0 \in \mathbb{R}$ Il s'agit de montrer que :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,y_0)} f(x, y) = f(0, y_0) \Leftrightarrow \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} f(h, y_0 + k) = f(0, y_0) \Leftrightarrow |f(h, y_0 + k) - f(0, y_0)| \xrightarrow{(h,k) \rightarrow (0,0)} 0$$

$$\text{Or : } |f(h, y_0 + k) - f(0, y_0)| = |(h^2 + h(y_0 + k)) \sin \frac{1}{h}| \leq |h| |h + y_0 + k| \xrightarrow{(h,k) \rightarrow (0,0)} 0$$

2. Montrer que f admet des dérivées partielles en $(0, 0)$ et les déterminer.

On utilise un taux d'accroissement puisqu'il s'agit d'étudier l'existence des dérivées ponctuellement en $(0, 0)$:

$$\frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \frac{(h^2 + 0) \sin \frac{1}{h} - 0}{h} = h \sin \frac{1}{h} \quad \text{d'où} \quad \left| \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} \right| \leq |h| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \quad \text{et} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = 0$$

$$\frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \frac{0 - 0}{h} = 0 \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \quad \text{et} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = 0$$

Ainsi, f admet des dérivées partielles en $(0, 0)$ et : $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$

3. Soit $y_0 \neq 0$, f admet-elle une dérivée partielle suivant x en $(0, y_0)$?

On étudie la limite du taux d'accroissement :

$$\Delta(h) = \frac{f(h, y_0) - f(0, y_0)}{h} = \frac{(h^2 + h y_0) \sin \frac{1}{h} - 0}{h} = h \sin \frac{1}{h} + y_0 \sin \frac{1}{h}$$

$$\text{Avec } h_n = \frac{1}{\pi + 2n\pi} \text{ alors } \Delta(h_n) = 0 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{Avec } h_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi} \text{ alors } \Delta(h_n) = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi} \times 1 + y_0 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} y_0 \neq 0$$

Aussi, le taux d'accroissement n'a pas de limite et la dérivée partielle suivant x en $(0, y_0)$ n'existe pas.

EXERCICE N° 1.5

Étudier l'existence des dérivées partielles de f lorsque $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^4 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

Donner un équivalent lorsque $x = 0$ de $f(x, x^2)$. Que peut-on conclure pour la fonction f ?

• Par les théorèmes usuels, f est C^1 sur $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$: c'est un quotient de deux fonctions polynômiale sur $\mathbb{R}^2$ avec $x^4 + y^2 \neq 0$. Les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent donc sur $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$

• Il reste à étudier l'existence des deux dérivées partielles en $(0, 0)$. On utilise des taux d'accroissements :

$$\frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = \frac{\frac{t^3}{t^4}}{t} = \frac{1}{t^2} \xrightarrow{t \rightarrow 0} +\infty \text{ donc } \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \text{ n'existe pas.}$$

$$\frac{f(0, t) - f(0, 0)}{t} = \frac{\frac{t^3}{t^2}}{t} = 1 \xrightarrow{t \rightarrow 0} +\infty \text{ donc } \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \text{ existe et vaut } 1$$

$$\bullet f(x, x^2) = \frac{x^3 + x^6}{2x^4} \sim_0 \frac{x^3}{2x^4} = \frac{1}{2x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \pm\infty \text{ (et pas } f(0, 0)!) \text{ donc } f \text{ n'est pas continue en } (0, 0)$$

On pouvait aussi utiliser une autre direction pour nier la continuité : $f(x, 0) = \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \pm\infty$

Par contre, il y a continuité dans la direction de l'axe des ordonnées $f(0, y) = y \xrightarrow{y \rightarrow 0} 0 = f(0, 0)$ et aussi dans la

direction de la première bissectrice $f(x, x) = \frac{2x^3}{x^4 + x^2} \sim_0 \frac{2x^3}{x^2} = 2x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$