

EXERCICE N° 1 Établir la nature des intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^1 \frac{\operatorname{ch}(t) - \cos(t)}{t^{\frac{5}{2}}} dt \quad I_2 = \int_1^{+\infty} (\sqrt{1+t^2} - t) dt \quad I_3 = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t \ln t} \quad I_4 = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t(1+t^2)} dt$$

Indication pour I_4 : Vérifier que $\ln(1+t) \leq t$ pour $t > 0$

• $\left[f : t \mapsto \frac{\operatorname{ch}(t) - \cos(t)}{t^{\frac{5}{2}}} \right]$ est C^0 sur $]0, 1]$ où $t > 0$ et il y a une singularité en 0 mais :

$$\operatorname{ch}(t) - \cos t = \left(1 + \frac{t^2}{2} + o_0(t^2)\right) - \left(1 - \frac{t^2}{2} + o_0(t^2)\right) = t^2 + o_0(t^2) \sim_0 t^2 \Rightarrow f(t) \sim_0 \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}$$

$$\begin{cases} f(t) \sim_0 \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} > 0 \\ \int_0^1 \frac{dt}{t^{\frac{1}{2}}} \text{ converge} \end{cases} \Rightarrow I_1 = \int_0^1 f(t) dt \text{ converge} \text{ par critère d'équivalence}$$

• $\left[f : t \mapsto \sqrt{1+t^2} - t \right]$ est C^0 sur $[1, +\infty[$ où $1+t^2 > 0$ et il y a une singularité en $+\infty$:

$$f(t) = |t| \left(1 + \frac{1}{t^2}\right)^{\frac{1}{2}} - t =_{t>0} t \left(1 + \frac{1}{2t^2} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right)\right) - t = \frac{1}{2t} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{t}\right) \sim_{+\infty} \frac{1}{2t}$$

$$f(t) \sim \frac{1}{2t} > 0 \text{ et } \int_1^{+\infty} \frac{dt}{2t} \text{ diverge} \Rightarrow I_2 = \int_1^{+\infty} f(t) dt \text{ diverge} \text{ par critère d'équivalence}$$

• Soit f avec $f(t) = \frac{1}{t \ln t} = \frac{1}{e^{(\ln t)(\ln t)}} = e^{-(\ln t)^2}$ aussi f est continue sur $]0, +\infty[$ où $t > 0$

Il y a deux singularités 0 et $+\infty$ qu'on étudie séparément :

En 0 : on essaye de prolonger par continuité : $-(\ln t)^2 \xrightarrow{t \rightarrow 0} -\infty \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = 0$ et donc on peut prolonger par continuité par $f(0) = 0$. L'intégrale est faussement généralisée en 0.

En $+\infty$: si $t \geq e^2 \Rightarrow \ln t \geq 2 \Rightarrow (\ln t)^2 \geq 2(\ln t) \Rightarrow -(\ln t)^2 \leq -2(\ln t) \Rightarrow 0 \leq f(t) \leq e^{-2 \ln t} = \frac{1}{t^2}$

Or, $\int_{e^2}^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge (Riemann en $+\infty$ avec $\alpha = 2 > 1$) donc, par majoration, $K_3 = \int_{e^2}^{+\infty} f(t) dt$ converge.

Alors, $J_3 = \int_0^{e^2} f(t) dt$ converge et K_3 converge donc $I_3 = J_3 + K_3 = \int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge

• $\left[f : t \mapsto \frac{\ln(1+t)}{t(1+t^2)} \right]$ est C^0 sur $]0, +\infty[$ où $1+t > 0$, $t \neq 0$ et $1+t^2 \neq 0$

Il y a deux singularités 0 et $+\infty$ qu'on étudie séparément :

En 0 : on essaye de prolonger par continuité : $f(t) \sim_0 \frac{t}{t \times 1} \sim_0 1$ donc $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = 1$ et f se prolonge par continuité

en 0 avec $f(0) = 1$ donc l'intégrale est faussement généralisée en 0 et : $J_4 = \int_0^1 f(t) dt$ converge

En $+\infty$: **Avec indication : Vérifier que $\ln(1+t) \leq t$ si $t \geq 0$**

On introduit $[\varphi : t \mapsto \ln(1+t) - t]$ alors φ est dérivable sur $[0, +\infty[$ et : $\varphi'(t) = \frac{1}{1+t} - 1 = \frac{-t}{1+t} \leq 0$ donc φ est décroissante sur $[0, +\infty[$ et donc : $\forall t \geq 0$, $\varphi(t) \leq \varphi(0) \Leftrightarrow \ln(1+t) - t \leq 0 \Leftrightarrow \ln(1+t) \leq t$

Dés lors : $\forall t \geq 1$, $0 \leq f(t) \leq \frac{t}{t(1+t^2)} = \frac{1}{1+t^2}$ puisque $t(1+t^2) > 0$ or $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = [\operatorname{Arctan} t]_1^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$

est une intégrale classique convergente donc, par majoration, on peut conclure que $K_4 = \int_1^{+\infty} f(t) dt$ converge.

Finalement : $I_4 = \int_0^{+\infty} f(t) dt = J_4 + K_4$ est une intégrale convergente.

OU BIEN **sans indication** : $\ln(1+t) = \ln(t) + \ln\left(1 + \frac{1}{t}\right) = \ln(t) + o\left(\ln(t)\right)$ puisque $\frac{\ln\left(1 + \frac{1}{t}\right)}{\ln(t)} = \underbrace{\frac{1}{\ln t}}_{\rightarrow 0} \times \underbrace{\ln\left(1 + \frac{1}{t}\right)}_{\rightarrow 0} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$

aussi $f(t) \sim_{+\infty} \frac{\ln t}{t^3} > 0$ donc $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^3} dt$ ont la même nature.

Mais : $0 < \frac{\ln t}{t^3} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge donc $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^3} dt$ converge et par suite : $K_4 = \int_1^{+\infty} f(t) dt$ converge.

EXERCICE N° 2 Justifier l'existence et calculer les intégrales : $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{\operatorname{ch} t}$ et $J = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{e^t + 1}}$ (Poser $u = \sqrt{e^t + 1}$)

Pour I : $\left[f : t \mapsto \frac{1}{\operatorname{ch} t} \right]$ est C^0 sur $\mathbb{R}$ (car $\operatorname{ch} t > 0$) et elle est paire :

I a la même nature que $J = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\operatorname{ch} t}$ et $I = 2J$ si ces intégrales sont convergentes

Pour J, il reste une singularité à étudier en $+\infty$: $f(t) \sim_{+\infty} \frac{2}{e^t}$ et $2e^{-t} > 0$ sur $[0, +\infty[$

donc (critère d'équivalence) : J et $\int_0^{+\infty} 2e^{-t} dt$ ont la même nature.

Or, on reconnaît une intégrale de référence : $\int_0^{+\infty} 2e^{-t} dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-t} dt$ converge car $1 > 0$.

Ainsi, J et I convergent et : $I = 2J = 2 \int_0^{+\infty} \frac{2}{e^t + e^{-t}} dt = 2 \int_0^{+\infty} \frac{2e^t}{(e^t)^2 + 1} dt = 2 \left[\arctan(e^t) \right]_0^{+\infty} = 4 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = \boxed{\pi = I}$

Pour J : $\left[f : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{e^t + 1}} \right]$ est C^0 sur $[0, +\infty[$. On pose : $u = \sqrt{e^t + 1}$, $du = \frac{e^t dt}{2\sqrt{e^t + 1}}$, $t \Big|_0^{+\infty}$, $u \Big|_{\sqrt{2}}^{+\infty}$

$\left[\varphi : t \mapsto \sqrt{e^t + 1} \right]$ est C^1 et strictement croissante (composées de deux fonctions croissantes donc elle réalise une bijection de $[0, +\infty[$ dans $[\sqrt{2}, +\infty[$.

Par changement de variables les intégrales sont de même nature et sous réserve de convergence :

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{2}{e^t} \times \frac{e^t dt}{\sqrt{e^t + 1}} = \int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{2}{u^2 - 1} du$$

$$\text{Or : } \int_{\sqrt{2}}^A \frac{2}{u^2 - 1} du = \int_{\sqrt{2}}^A \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1} \right) du = [\ln|u-1| - \ln|u+1|]_{\sqrt{2}}^A = \underbrace{\ln \frac{A-1}{A+1}}_{\xrightarrow{A \rightarrow +\infty} \ln 1 = 0} - \ln(\sqrt{2}-1) + \ln(1+\sqrt{2})$$

$$\text{Aussi, les deux intégrales convergentes et : } J = \ln \left(\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} \right) \ln \left(\frac{(1+\sqrt{2})^2}{(\sqrt{2})^2 - 1} \right) = \boxed{2 \ln(1+\sqrt{2}) = J}$$

EXERCICE N° 3 Soient $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$. On pose $I(\alpha) = \int_0^1 t^\alpha \arctan(t) dt$ et $J(\beta) = \int_1^{+\infty} \frac{\arctan t}{t^\beta} dt$.

1. Etudier la convergence de $I(\alpha)$ et $J(\beta)$ suivant les valeurs de α et β .

Attention ! α et β sont des réels quelconques (pas forcément entier) donc $t^\alpha = e^{\alpha \ln t}$!

• $[f : t \mapsto t^\alpha \arctan t]$ est C^0 sur $]0, 1]$ et : $\begin{cases} f(t) \sim_0 t^{\alpha+1} = \frac{1}{t^{-\alpha-1}} \\ \frac{1}{t^{-\alpha-1}} > 0 \text{ sur }]0, 1] \end{cases} \Rightarrow I(\alpha) \text{ et } \int_0^1 \frac{dt}{t^{-\alpha-1}} \text{ ont même nature}$

Or, on reconnaît une intégrale de Riemann en 0 donc :

$$I(\alpha) \text{ converge} \Leftrightarrow \int_0^1 \frac{dt}{t^{-\alpha-1}} \text{ converge} \Leftrightarrow -\alpha - 1 < 1 \Leftrightarrow \boxed{\alpha > -2 \Leftrightarrow I(\alpha) \text{ converge}}$$

• $\left[g : t \mapsto \frac{\arctan t}{t^\beta} \right]$ est C^0 sur $[1, +\infty[$ car $t^\beta = e^{\beta \ln t} \neq 0$ et : $\begin{cases} g(t) \sim_{+\infty} \frac{\pi}{2t^\beta} \\ \frac{\pi}{2t^\beta} > 0 \text{ sur } [1, +\infty[\end{cases} \Rightarrow J(\beta) \text{ et } \frac{\pi}{2} \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\beta}$

Or, on reconnaît une intégrale de Riemann en $+\infty$ aussi :

$$\boxed{J(\beta) \text{ converge} \Leftrightarrow \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\beta} \text{ converge} \Leftrightarrow \beta > 1}$$

2. Calculer $I(0)$ et $I(1)$.

Par intégration par parties notée IPP (menée sur le segment $[0, 1]$) :

$$\begin{cases} u(t) = \arctan t & u'(t) = \frac{1}{1+t^2} \\ v'(t) = 1 & v(t) = t \end{cases} \quad \text{où } u \text{ et } v \text{ de classe } C^1 \text{ sur } [0, 1]$$

$$I(0) = \int_0^1 \arctan t dt = [t \arctan t]_0^1 - \int_0^1 \frac{t}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2t}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{4} - \left[\frac{1}{2} \ln(1+t^2) \right]_0^1 = \boxed{\frac{\pi}{4} - \frac{\ln(2)}{2} = I(0)}$$

Par IPP(menée sur le segment $[0, 1]$): $\begin{cases} u(t) = \arctan t & u'(t) = \frac{1}{1+t^2} \\ v'(t) = t & v(t) = \frac{t^2}{2} \end{cases}$ où u et v de classe C^1 sur $[0, 1]$

$$I(1) = \left[\frac{t^2}{2} \arctan t \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^2}{2(1+t^2)} dt = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(t^2+1)-1}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{8} - \left[\frac{1}{2}(t - \arctan t) \right]_0^1 = \left[\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right] = I(1)$$

3. Pour quelles valeurs de α l'expression $I(\alpha) + J(\alpha + 2)$ est-elle définie ?

Dans ce cas, calculer $I(\alpha) + J(\alpha + 2)$ (utiliser un changement de variable). En déduire $J(2)$ et $J(3)$.

Le sujet est "mal posé": doit-on étudier le cas de deux intégrales divergentes ? A priori non...si on se réfère au cours où une somme de deux intégrales convergent si les deux intégrales convergent en même temps

Avec la question 1: $I(\alpha) + J(\alpha + 2)$ est définie $\Leftrightarrow I(\alpha)$ Cv et $J(\alpha + 2)$ CV $\Leftrightarrow (\alpha > -2 \text{ et } \alpha + 2 > 1) \Leftrightarrow \boxed{\alpha > -1}$.

Il va falloir réunir les intégrales en une seule. On a deux résultats qui peuvent faire cela: la relation de Chasles si les intégrandes sont les mêmes ou la linéarité si les domaines d'intégration sont les mêmes. L'indication donnée (changement de variable), nous pousse donc à utiliser un changement de variable qui transforme $]0, 1]$ en $[1, +\infty[$

On pose $t = \frac{1}{u} = \varphi(u)$ dans $I(\alpha)$: $dt = -\frac{du}{u^2}$, $t \Big|_1^0, u \Big|_1^{+\infty}$

La fonction φ est C^1 , strictement décroissante sur $]0, 1]$ donc bijective de $]0, 1]$ dans $[1, +\infty[$

Le changement de variable est donc possible et la convergence assurée puisque l'intégrale $I(\alpha)$ converge.

$$\text{Alors: } I(\alpha) = \int_0^1 t^\alpha \arctan t dt = \int_{+\infty}^1 u^{-\alpha} \arctan\left(\frac{1}{u}\right) \frac{du}{-u^2} = \int_1^{+\infty} \frac{\text{Arctan } \frac{1}{u}}{u^{\alpha+2}} du$$

La variable d'intégration est une variable "muette" autrement dit son nom n'a pas d'importance:

$$\int_1^{+\infty} f(t) dt = \int_1^{+\infty} f(x) dx = \int_1^{+\infty} f(u) du = \dots$$

On peut utiliser une lettre quelconque (sauf celle qui ont un sens précis: e , π ou le paramètre α par exemple ici)

Par linéarité de l'intégrale (toutes les intégrales convergent):

$$I(\alpha) + J(\alpha + 2) = \int_1^{+\infty} \frac{\text{Arctan } \frac{1}{u} + \text{Arctan } u}{u^{\alpha+2}} dt = \frac{\pi}{2} \int_1^{+\infty} \frac{du}{u^{\alpha+2}} \quad \text{car } \forall u > 0, \quad \text{Arctan } u + \text{Arctan } \frac{1}{u} = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Ainsi, pour tout } \alpha > 1: \quad I(\alpha) + J(\alpha + 2) = \frac{\pi}{2} \left[\frac{u^{-\alpha-1}}{-\alpha-1} \right]_1^{+\infty} = \boxed{\frac{\pi}{2(\alpha+1)} = I(\alpha) + J(\alpha + 2)}.$$

Certaines relations classiques sont à connaître avec leurs démonstrations (qui consistent à mener une étude de fonction). Les plus fréquentes sont:

- $\forall x \in [-1, 1], \quad \text{Arcsin}(x) + \text{Arccos}(x) = \frac{\pi}{2}$

Démo: on introduit une fonction φ d'expression du 1er membre, continue sur $[-1, 1]$, dérivable sur $] -1, 1[$ et qui sera constante (car de dérivée nulle) égale à $\varphi(0)$

- $\forall x > 0 \quad \text{Arctan } x + \text{Arctan } \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \quad \text{et, par imparité: } \forall x < 0 \quad \text{Arctan } x + \text{Arctan } \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$

Démo: on introduit une fonction φ d'expression du 1er membre, dérivable sur $]0, +\infty[$ qui sera constante (car de dérivée nulle) égale à $\varphi(1)$

- $\forall x \geq 0, \ln(1+x) \leq x$ ou $\forall x \geq 0, \sin x \leq x$

Démo: on introduit une fonction φ d'expression la différence des 2 membres qui sera décroissante(car de dérivée négative) donc $\varphi(x) \leq \varphi(0)$

On en déduit alors facilement que $J(2) = \frac{\pi}{2} - I(0) = \boxed{\frac{\pi}{4} + \frac{\ln(2)}{2} = J(2)}$ et $J(3) = \frac{\pi}{4} - I(1) = \boxed{\frac{1}{2} = J(3)}$.