PT : Correction du TD n° 1 sur le chapitre VI- Recherche des éléments propres d'une matrice ou un endomorphisme

EXEMPLE N° 1 On note $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ dans $M_2(\mathbb{R})$

On définit l'application f qui à une matrice M de $M_2(\mathbb{R})$ associe $f(M) = AMB$.
Vérifier que f est un endomorphisme de $M_2(\mathbb{R})$ et préciser ses valeurs propres et ses espaces propres.

• Il est clair que : $\forall M \in M_2(\mathbb{R}),\ f(M) \in M_2(\mathbb{R})$ et : $\forall (M,N) \in M_2(\mathbb{R}), \forall \alpha \in \mathbb{R}$,
$f(\alpha M + N) = A(\alpha M + N)B = \alpha AMB + ANB = \alpha f(M) + f(N)$ donc on a bien $f \in \mathscr{L}(M_2(\mathbb{R}))$

• Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ avec $M \neq O_{2,2}$ et $f(M) = \lambda M$

$$f(M) = \lambda M \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} d = \lambda a \\ 0 = \lambda b \\ 0 = \lambda c \\ 0 = \lambda d \end{cases}$$

Si $\lambda \neq 0$ alors $a = b = c = d = 0$ ce qui est impossible car $M \neq O_{2,2}$ donc $sp(f) \subset \{0\}$
Si $\lambda = 0$ alors $d = 0$ mais (a,b,c) sont libres donc 0 est bien vp.

Finalement : $\boxed{sp(f) = \{0\}}$ et $\boxed{E_0(f) = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \middle| (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\right\} = \mathrm{Vect}\big(E_{11}, E_{12}, E_{21}\big)}$

Retrouver le spectre de f à l'aide du polynôme caractéristique.

On utilise la matrice canoniquement associée à f dans la base canonique $\mathscr{B} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ de $M_2(\mathbb{R})$:

On vu que : $f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ aussi $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

et donc : $\chi_f(x) = \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & -1 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = x^4$ qui a pour unique racine 0.

Ainsi : $\mathrm{Sp}(f) = \{0\}$ De plus, $E_0(f) = \mathrm{Ker}\, f$ or, d'après sa matrice, $\mathrm{rg}(f) = 1 \Rightarrow \dim \mathrm{Ker}\, f = 4 - 1 = 3$ et (E_{11}, E_{12}, E_{21}) est une famille libre de 3 vecteurs de Ker f (3 colonnes nulles dans la matrice, libre car sous-famille d'une base) or $\dim \mathrm{Ker}\, f = 3$ donc $E_0(f) = \mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Vect}(E_{11}, E_{12}, E_{21})$

EXERCICE N° 1/4 Soit $E = C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et D l'endomorphisme de E qui à $f \in E$ associe la fonction f'.

1. Calculer $D(f_0)$ où $f_0 = [x \mapsto 1]$ et en déduire que 0 est valeur propre de D. Déterminer l'espace propre associé 0 de f.

   $D(f_0) = [x \mapsto 0] = 0 \times f_0$ et $f_0 \neq [x \mapsto 0]$ càd f_0 n'est pas le vecteur nul
   donc f_0 est, par définition, un vecteur propre associé à 0 pour D et $\boxed{\text{0 est bien valeur propre de D}}$

   $f \in \mathrm{Ker}\,(D - 0 \times id) \Leftrightarrow D(f) = 0 \Leftrightarrow f' = 0 \Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R}, f = [x \mapsto C] = c f_0$ ainsi $\boxed{E_0(D) = \mathrm{Ker}\,(D) = \mathrm{Vect}(f_0)}$

2. Calculer $D(f_1)$ où $f_1 = [x \mapsto e^x]$ est la fonction exponentielle. Qu'en déduire pour le spectre de D?

   $D(f_1) = f_1 = 1 \times f_1$ et $f_1 \neq [x \mapsto 0]$ n'est pas le vecteur nul
   donc, par définition, on peut en déduire que $\boxed{\text{1 est une valeur propre de D}}$

3. Déterminer tous les éléments propres de D

   $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de D si et seulement si il existe $f \in E$ avec $f \neq [x \mapsto 0]$ et $D(f) = \lambda f$
   Mais : $D(f) = \lambda f \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \lambda f \Leftrightarrow f$ est solution de l'équation différentielle $y' - \lambda y = 0$
   Or, les solutions de $y' - \lambda y = 0$ sont les fonctions $[x \mapsto Ce^{\lambda x}]$ où $C \in \mathbb{R}$
   Ainsi, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on peut trouver un vecteur propre $f_\lambda = [x \mapsto e^{\lambda x}]$ non nul associé aussi $\boxed{\mathrm{Sp}(D) = \mathbb{R}}$
   Et, l'espace propre associé au réels λ est $\boxed{E_\lambda(D) = \mathrm{Ker}\,(D - \lambda id) = \mathrm{Vect}\big(f_\lambda\big)}$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$

EXEMPLE N° 3/2 Soit l'endomorphisme f de $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ qui à la suite $u = (u_n)_{n\geqslant 0}$ associe la suite $v = (v_n)_{n\geqslant 0}$ telle que $\begin{cases} v_0 = u_0 \\ \forall n \geqslant 1,\ v_n = 2(u_n - u_{n-1}) \end{cases}$. Déterminer les éléments propres de f

On cherche les réels λ tels qu'il existe une suite $u = (u_n)_{n\geqslant 0}$ non nulle avec
$f(u) = \lambda u \Leftrightarrow v = \lambda u \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \lambda u_n \Leftrightarrow u_0 = \lambda u_0$ et $\forall n \geqslant 1,\ 2(u_n - u_{n-1}) = \lambda u_n$
L'équation $u_0 = \lambda u_0 \Leftrightarrow (1-\lambda)u_0 = 0$ conduit soit à $\lambda = 1$ soit à $u_0 = 0$
si $u_0 = 0$ et $\lambda \neq 1$: on utilise ensuite la seconde relation $(2-\lambda)\, u_n = 2u_{n-1}$
si $\lambda = 2$ alors $\forall n \geqslant 1, u_{n-1} = 0 \Leftrightarrow (u_n)_{n\geqslant 0} = (0)$ ce qui est absurde car $u \neq 0$ donc 2 n'est pas valeur propre
si $\lambda \neq 2$ alors (u_n) est une suite géométrique et la nullité de u_0 conduit à $(u_n)_{n\geqslant 0} = (0)$ ce qui est absurde
On peut donc conclure, à ce stade, que la seule valeur propre éventuellement possible est $\lambda = 1$ soit que $\mathrm{Sp}(f) \subset \{1\}$
si $\lambda = 1$ alors on peut choisir u_0 non nul et on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = 2u_{n-1}$ autrement dit $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 \times 2^n$
On peut donc conclure que $\lambda = 1$ est bien une valeur propre (et donc $\{1\} \subset \mathrm{Sp}(f)$) avec $E_1(f) = \mathrm{Vect}\big((2^n)_{n\geqslant 0}\big)$
Finalement : $\boxed{\mathrm{Sp}(f) = \{1\}}$ et l'espace propre associé à $\lambda = 1$ est la droite vectorielle engendré par la suite $(2^n)_{n\geqslant 0}$

EXERCICE N° 1/2 Donner les valeurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & -3 \\ -3 & 0 & -1 & -2 \\ -2 & -3 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

On peut utiliser le polynôme caractéristique : les valeurs propres de A sont les racines de χ_A où

$$\chi_A(x) = \det(xI_4 - A) = \begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 3 \\ 3 & x & 1 & 2 \\ 2 & 3 & x & 1 \\ 1 & 2 & 3 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+6 & 1 & 2 & 3 \\ x+6 & x & 1 & 2 \\ x+6 & 3 & x & 1 \\ x+6 & 2 & 3 & x \end{vmatrix} = (x+6)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & x & 1 & 2 \\ 1 & 3 & x & 1 \\ 1 & 2 & 3 & x \end{vmatrix} = (x+6)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & x-1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & x-2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & x-3 \end{vmatrix}$$

avec $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3 + C_4$ avec $L_i \leftarrow L_i - L_1$ pour $i \in [\![2,4]\!]$

On développe selon C_1 : $\chi_A(x) = (x+6)\begin{vmatrix} x-1 & -1 & -1 \\ 2 & x-2 & -2 \\ 1 & 1 & x-3 \end{vmatrix} = (x+6)\begin{vmatrix} x-2 & -1 & -1 \\ 0 & x-2 & -2 \\ x-2 & 1 & x-3 \end{vmatrix}$ avec $C_1 \leftarrow C_1 + C_3$

Aussi : $\chi_A(x) = (x+6)(x-2)\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & x-2 & -2 \\ 1 & 1 & x-3 \end{vmatrix} = (x+6)(x-2)\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & x-2 & -2 \\ 0 & 2 & x-2 \end{vmatrix}$ avec $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$

Enfin, en développant selon C_1 :
$\chi_A(x) = (x+6)(x-2)\Big((x-2)^2 + 4\Big) = (x+6)(x-2)\big((x-2) - (2i)^2\big) = (x+6)(x-2)(x-2-2i)(x-2+2i)$
Le spectre réel de A est donc $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{2, -6\}$ et le spectre complexe de A est $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{2, -6, 2-2i, 2+2i\}$