

PT : TD n°1 sur le chapitre V

EXERCICE N° 1 Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $xy' + (1-x)y = xe^{2x}$

Il s'agit d'une EDL1 non résolue sur $\mathbb{R}$ car $x \neq 0$. On résout d'abord sur $I \subset \mathbb{R}^*$ puis on procédera à un recollement en 0.

Résolution sur l'intervalle I où $I \subset \mathbb{R}^*$

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = y_p + \text{Vect}(h)$ où y_p est une solution particulière et $\text{Vect}(h)$ est l'ensemble des solutions homogènes. Sur I : (E) $\Leftrightarrow y' + \left(\frac{1}{x} - 1\right)y = e^{2x}$ avec $a(x) = \frac{1}{x} - 1 = (\ln|x| - x)'$

- On sait que $h(x) = \frac{e^x}{|x|}$ ou encore $h(x) = \frac{e^x}{x}$ quitte à faire porter le signe par la constante puisque $\frac{e^x}{x}$ garde forcément un signe constant sur I.

- On cherche une solution particulière par la méthode de variation de la constante sous la forme $y_p(x) = C(x)h(x)$ où C est dérivable sur I et $h(x) = \frac{e^x}{x}$ est l'expression d'une solution homogène : y_p solution de (E) $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, C'(x) = xe^x$

On cherche alors C(x) sous la forme $C(x) = (ax + b)e^x$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$: $C'(x) = (ax + a + b)e^x$ d'où il suffit que $\begin{cases} a = 1 \\ a + b = 0 \end{cases}$

Aussi : $C(x) = (x - 1)e^x$ convient et une solution particulière est $\left[y_p : x \mapsto (x - 1)\frac{e^{2x}}{x} \right]$

• Finalement, l'ensemble des solutions de (E) sur I est $\mathcal{S} = y_p + \text{Vect}(h) = \left\{ \left[x \mapsto \frac{x-1}{x}e^{2x} + C\frac{e^x}{x} \right] \mid C \in \mathbb{R} \right\}$

• Recollement en 0 :

Analyse Si y est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$ alors

- c'est une solution sur $] -\infty, 0[$ donc : $\exists C \in \mathbb{R}, \forall x < 0, y(x) = \frac{x-1}{x}e^{2x} + C\frac{e^x}{x}$

- c'est une solution sur $]0, +\infty[$ donc : $\exists K \in \mathbb{R}, \forall x > 0, y(x) = \frac{x-1}{x}e^{2x} + K\frac{e^x}{x}$

- l'équation doit être vérifiée en $x = 0$ ce qui donne $y(0) = 0$

- y être continue et dérivable en 0 $\Leftrightarrow y$ admet un DL₁ en 0 or :

si $x < 0$: $y(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right) \times \left(1 - 2x + \frac{(2x)^2}{2} + o(x^2)\right) + \frac{C}{x} \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) = \frac{C-1}{x} + (1-2+C) + (-2+2+\frac{C}{2})x + o(x)$

et, de même, si $x > 0$: $y(x) = \frac{K-1}{x} + (1-2+K) + (-2+2+\frac{K}{2})x + o(x)$

La continuité impose que $C = K = 1$ (sinon l'une des limites à droite ou à gauche de $y(x)$ explose à l'infini et il n'y aurait pas continuité)

Les constantes C et K étant totalement déterminé, c'est la fin de l'analyse.

Synthèse On considère la fonction y avec $y(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x}e^{2x} + \frac{e^x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Le travail fait dans l'analyse donne : $\forall x \in \mathbb{R}^*, y(x) = \frac{x}{2} + o(x)$ ($K = C = 1$ dans les DL)

On sait donc que y est continue et dérivable en 0 avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = \frac{1}{2}$.

Conclusion

Il y a une unique solution sur $\mathbb{R}$ qui est la fonction y avec $y(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x}e^{2x} + \frac{e^x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

PT : TD n°1 sur le chapitre V

EXERCICE N°1 Résoudre l'équation (E) : $t(1-t)y' + y = t$ sur $\mathbb{R}$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 (EDL₁) non résolue sur $\mathbb{R}$ puisque $t(1-t) = 0$ lorsque $t \in \{0, 1\}$

- On résout d'abord l'équation sur un intervalle $J \subset \mathbb{R} - \{0, 1\}$ où l'équation est résolue en y' car $t(1-t) \neq 0$

Solutions homogènes Sur J , l'équation homogène est (H) : $y' + \frac{1}{t(1-t)}y = 0$ et le cours s'applique.

On cherche une primitive A sur J de a où $a(t) = \frac{1}{t(1-t)} = \frac{1}{t} + \frac{1}{1-t} = \frac{1}{t} - \frac{u'(t)}{u(t)}$ où $u(t) = 1-t$

Il s'agit d'une primitive d'une expression $\frac{1}{at^2+bt+c}$ où le discriminant $\Delta > 0$ donc on utilise une décomposition en éléments simples aussi $A(t) = \ln|t| - \ln|1-t|$ convient et l'expression d'une solution homogène est

$$y_h(t) = Ce^{-A(t)} = C \frac{|1-t|}{|t|} \quad \text{où } C \in \mathbb{R}$$

Or, J est inclus dans l'un des intervalles $] -\infty, 0[$, $]0, 1[$ ou $]1, +\infty[$ où $\frac{1-t}{t} = \frac{t(1-t)}{t^2}$ garde un signe constant (celui de $t(1-t)$) aussi, quitte à faire porter le signe sur la constante :

l'ensemble des solutions homogène est $\text{Vect}(h)$ où $h(t) = \frac{1-t}{t}$

Solutions particulières On cherche une solution par la méthode de variation de la constante sous la forme

$$y(t) = C(t)h(t) \text{ avec } C \text{ de classe } C^1 \text{ sur } J \text{ et } h \text{ une solution homogène (par exemple : } h(t) = \frac{1-t}{t})$$

$$y \text{ solution de (E)} \Leftrightarrow t(1-t)C'(t)h(t) + \underbrace{t(1-t)C(t)h'(t) + C(t)h(t)}_{=0} = t \Leftrightarrow C'(t)(1-t)^2 = t \Leftrightarrow C'(t) = \frac{t}{(1-t)^2}$$

Or : $\frac{t}{(1-t)^2} = \frac{(t-1)+1}{(1-t)^2} = -\frac{1}{1-t} + \frac{1}{(1-t)^2} = \frac{u'(t)}{u(t)} - u'(t) \times u(t)^{-2}$ donc une primitive possible est :

Le grand classique du $-1+1!$

$$C(t) = \ln|1-t| - \frac{(1-t)^{-2+1}}{-2+1} = \ln|1-t| + \frac{1}{1-t} \quad \text{et une solution particulière est d'expression}$$

$$y_p(t) = C(t)h(t) = \frac{(1-t)\ln|1-t|}{t} + \frac{1}{t}$$

Solutions générales sur l'intervalle $J \subset \mathbb{R} - \{0, 1\}$

L'expression d'une solution de (E) sur J est $y(x) = \frac{(1-t)\ln|1-t|}{t} + \frac{1}{t} + C \frac{1-t}{t}$ où $C \in \mathbb{R}$

• Recollement des solutions en 0 Si y est une solution de (E) sur $] -\infty, 1[$ alors :

- c'est une solution sur $] -\infty, 0[$ et : $\exists K \in \mathbb{R}, \forall t < 0, y(t) = \frac{(1-t)\ln(1-t)}{t} + \frac{1}{t} + K \frac{1-t}{t}$

- c'est une solution sur $]0, 1[$ et : $\exists C \in \mathbb{R}, \forall t \in]0, 1[, y(t) = \frac{(1-t)\ln(1-t)}{t} + \frac{1}{t} + C \frac{1-t}{t}$

- la fonction y doit être continue et dérivable en 0 donc admettre un DL₁(0) :

$$\text{En } 0^- : y(t) = \frac{(1-t)\ln(1-t)}{t} + \frac{1}{t} + K \frac{1-t}{t} = (1-t) \times \frac{1}{t} \times (-t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)) + \frac{1}{t} + \frac{K}{t} - K = (1-t)(-1 - \frac{t}{2} + o(t)) + \frac{K+1}{t} - K$$

$$\text{soit : } y(t) = \frac{K+1}{t} - (1+K) + \frac{t}{2} + o(t) \quad \text{de sorte que nécessairement } K+1 = 0$$

La situation est analogue en 0^+ ce qui impose $C+1 = 0$. Finalement, $C = K = -1$ et :

$$y(t) = \frac{t}{2} + o(t) \quad (\text{en } 0^- \text{ et en } 0^+) \text{ donc } y \text{ est bien dérivable en } 0 \text{ avec } y(0) = 0 \text{ et } y'(0) = \frac{1}{2}$$

A noter qu'en évaluant l'équation (E) pour $t = 0$, on trouve bien : $0 \times y'(0) + y(0) = 0 \Leftrightarrow y(0) = 0$

$$\text{Il y a une unique solution de (E) sur }] -\infty, 1[\text{ d'expression } y(t) = \frac{(1-t)\ln(1-t)}{t} + \frac{1}{t} - \frac{1-t}{t} \text{ pour } t \neq 0 \text{ et } y(0) = 0$$

Ici, la continuité en 0 suffisait à fixer les constantes K et C puisque

$$y(t) = \frac{(1-t)\ln(1-t)}{t} + \frac{1}{t} + K \frac{1-t}{t} = \underbrace{\frac{1+K}{t}}_{\xrightarrow{t \rightarrow 0} \infty \text{ sauf si } K+1=0} - K + (1-t) \times \underbrace{\frac{\ln(1-t)}{t}}_{\sim_0 \frac{-t}{t} \sim -1} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 1 \times -1$$

La situation est analogue en 0^+ et impose $C = -1$. Attention! Pour conclure à l'existence de la solution sur $] -\infty, 1[$, il faut toutefois vérifier la dérivabilité en 0 de la fonction où $K = C = -1$ et $y(0) = 0$ avec par exemple un DL₁(0)

• **Recollement des solutions en 1**

Si y est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$ alors :

- c'est une solution sur $] -\infty, 1[$ et : $\exists K \in \mathbb{R}, \forall t < 1, y(t) = \frac{(1-t)\ln(1-t)}{t} + \frac{1}{t} - \frac{1-t}{t}$ si $t \neq 0$ et $y(0) = 0$

- c'est une solution sur $]1, +\infty[$ et : $\exists C \in \mathbb{R}, \forall t > 1, y(t) = \frac{(1-t)\ln(t-1)}{t} + \frac{1}{t} + C \frac{1-t}{t}$

- la fonction y doit être continue et dérivable en 1 donc admettre un DL₁(1) :

si $h < 0$: $y(1+h) = -h \ln|h| \times \frac{1}{1+h} + \frac{1}{1+h} + \frac{h}{1+h} = -h \ln|h| \times (1-h+o(h)) + (1-h+o(h)) + h(1+o(1))$
 soit $y(1+h) = 1 - h \ln|h| + o(h)$ car $h^2 \ln|h| = h \times \underbrace{h \ln|h|}_{\xrightarrow{h \rightarrow 0} 0} = o(h)$

si $h > 0$: $y(1+h) = -h \ln h \times \frac{1}{1+h} + \frac{1}{1+h} + \frac{h}{1+h} = -h \ln|h| \times (1-h+o(h)) + (1-h+o(h)) + Ch(1+o(1))$
 soit $y(1+h) = 1 + (C-1)h - h \ln|h| + o(h)$ car $h^2 \ln|h| = h \times \underbrace{h \ln|h|}_{\xrightarrow{h \rightarrow 0} 0} = o(h)$

La fonction y sera continue en 1 quel que soit la valeur de C avec $y(1) = 1$ mais :

$$\frac{y(1+h) - y(1)}{h} = -\ln|h| + o(1) \xrightarrow{h \rightarrow 0^-} +\infty$$

donc y ne sera jamais dérivable en 1 quel que soit la valeur de C

Il n'y a donc pas de solution de (E) sur $\mathbb{R}$

EXERCICE N° 2 Soit $a \in \mathbb{R}$, déterminer suivant les valeurs de a les solutions de $(E_a) : ay'' - (1+a^2)y' + ay = t$
 On pourra rechercher une solution particulière de (E_a) sous la forme d'une fonction affine.

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 2 (EDL2) si $a \neq 0$.

On doit distinguer le cas $a = 0$ du cas $a \neq 0$

• Si $a = 0$ alors $(E_0) : -y' = t$ a pour solution les fonctions d'expression $y(t) = -\frac{t^2}{2} + K$ où $K \in \mathbb{R}$

• On suppose désormais $a \neq 0$ et (E_a) est une EDL2 à coefficients constants.

Le sujet propose de chercher une solution particulière y_p affine donc de la forme $y_p(t) = \alpha t + \beta$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

Alors : $y'_p(t) = \alpha$ et $y''_p(t) = 0$ d'où : $ay''_p - (1+a^2)y'_p + ay_p = t$

$$\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, -(1+a^2)\alpha + a(\alpha t + \beta) = t \Leftrightarrow \begin{cases} a\alpha = 1 \\ a\beta - (1+a^2)\alpha = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{a} \text{ et } \beta = \frac{1+a^2}{a^2}$$

Une solution particulière a pour expression $[t \mapsto \frac{1}{a}t + 1 + a^2]$

L'équation caractéristique est $ar^2 - (1+a^2)r + a = 0$ de discriminant $\Delta = (1+a^2)^2 - 4a^2 = 1 - 2a^2 + a^4 = (1-a^2)^2$

On doit donc distinguer les cas $a = \pm 1$ où $\Delta = 0$ des cas $a \in \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$ où $\Delta > 0$

- Si $a = \pm 1$ alors il y a une racine double $r = \frac{2}{2a} = \frac{1}{a} = a$ (car $a = \pm 1$)

Les solutions homogènes ont pour expression $y_h(t) = (\alpha t + \beta)e^{at}$ où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

On connaît une solution particulière d'expression $y_p(t) = \frac{1}{a}t + 1 + a^2 = at + 2$ car, si $a = \pm 1$, alors $\frac{1+a^2}{a^2} = \frac{2}{1} = 2$ et $\frac{1}{a} = a$

Aussi, la solution générale a pour expression $y(t) = at + 2 + (\alpha t + \beta)e^{at}$ où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ lorsque $a = \pm 1$

- Si $a \in \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$ alors les racines sont $r = \frac{(1+a^2) - (1-a^2)}{2a} = a$ et $r = \frac{(1+a^2) + (1-a^2)}{2a} = \frac{1}{a}$

Les solutions homogènes ont pour expression $y_h(t) = \alpha e^{at} + \beta e^{\frac{t}{a}}$ où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

On connaît une solution particulière d'expression $y_p(t) = \frac{1}{a}t + \frac{1+a^2}{a^2}$

La solution générale a pour expression $y(t) = \frac{1}{a}t + \frac{1+a^2}{a^2} + \alpha e^{at} + \beta e^{\frac{t}{a}}$ où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ lorsque $a \in \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$