PT : Correction du TD n°1 sur le chapitre IV

EXERCICE N° 1 Étant donné un paramètre réel m, on considère $\mathscr{C}_m : x^2+y^2-4mx-2my+\dfrac{9m^2}{2}-m-\dfrac{1}{2}=0$

1. Si $m \neq -1$, montrer que $\mathscr{C}_m$ est un cercle et préciser son centre I_m et son rayon R_m. Que dire de $\mathscr{C}_{-1}$?

Pour tout m réel

$$x^2+y^2-4mx-2my+\frac{9m^2}{2}-m-\frac{1}{2}=0 \Leftrightarrow (x-2m)^2-4m^2+(y-m)^2-m^2+\frac{9}{2}m^2-m-\frac{1}{2}=0$$
$$\Leftrightarrow (x-2m)^2+(y-m)^2=\frac{m^2+2m+1}{2}=\frac{(m+1)^2}{2}$$

$\boxed{\text{Si } m\neq -1,\ \mathscr{C}_m \text{ est le cercle de centre } \mathrm{I}_m(2m,m) \text{ et de rayon } \mathrm{R}_m=\dfrac{|m+1|}{\sqrt{2}}}$. Si $m=-1$, $\boxed{\mathscr{C}_{-1}=\{\mathrm{I}_{-1}\} \text{ où } \mathrm{I}_{-1}(-2,-1)}$

Attention à ne pas oublier la valeur absolue ($\sqrt{a^2}=|a|$! sinon votre rayon peut devenir négatif...

2. Justifier que les centres de ces cercles sont situés sur une droite Δ dont on donnera une équation cartésienne.

Méthode 1: Les centres I_m sont sur la courbe de représentation paramétrique $\begin{cases} x=2m \\ y=m \end{cases}$, $m\in\mathbb{R}$

O reconnaît la représentation paramétrique de la droite $\Delta = \mathrm{O}+\mathrm{Vect}(\vec{u})$ où $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ ainsi

$\boxed{\text{les centres des cercles sont tous situés sur une même droite } \Delta}$

En utilisant le vecteur directeur, on sait qu'une équation cartésienne de Δ est:
$\Delta :\ x-2y+c=0$ avec $0-2\times 0+c=0 \Leftrightarrow c=0$. Ainsi: $\boxed{\Delta :\ x-2y=0}$

Méthode 2: On commence par déterminer une équation de la droite $\Delta=(\mathrm{I}_0\mathrm{I}_1)=\mathrm{I}_0+\mathrm{Vect}(\overrightarrow{\mathrm{I}_0\mathrm{I}_1})=\mathrm{O}+\mathrm{Vect}(\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix})$

(c'est elle qui doit contenir tous les autres points).
On obtient (comme avant): $\Delta :\ x-2y=0$ et on vérifie que: $\forall m\in\mathbb{R},\ 2m-2\times m=0 \Rightarrow \mathrm{I}_m(2m,m)\in\Delta$

3. Justifier que $\mathrm{I}(-2,-1)$ est extérieur au cercle $\mathscr{C}_0$ et déterminer une équation cartésienne des deux tangentes Δ_1 et Δ_2 à $\mathscr{C}_0$ issues de I.

Pour préciser la position d'un point par rapport au cercle, on compare la distance entre le centre et le point au rayon du cercle $\mathrm{I}_0\mathrm{I}=\mathrm{OI}=\sqrt{5}>\mathrm{R}_0=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ donc $\boxed{\text{I est bien à l'extérieur de } \mathscr{C}_0}$

Pour un point situé sur d'un cercle, il n'y a qu'une tangente au cercle qui passe par ce point et elle est normale au rayon
Par un point extérieur au cercle, on va pouvoir mener deux tangentes. Pour cela, on utilise une droite fixée au point et on va laisser la pente "libre" de façon à balayer le plan pour trouver les deux tangentes qui sont les droites qui ne rencontrent le cercle qu'en un seul point.
Lors de l'étude de l'intersection d'une droite $\mathscr{D}$ et d'un cercle $\mathscr{C}$ de centre Ω et de rayon R, il n'y a que 3 possibilités. On calcule $d(\Omega,\mathscr{D})=\Omega\mathrm{H}$ où H est le projeté orthogonal de Ω sur $\mathscr{D}$ et:
-soit $d(\Omega,\mathscr{D})>\mathrm{R}$ et alors $\mathscr{D}\cap\mathscr{C}=\emptyset$
-soit $d(\Omega,\mathscr{D})=\mathrm{R}$ et $\mathscr{D}$ est une tangente à $\mathscr{C}$ en H et $\mathscr{D}\cap\mathscr{C}=\{\mathrm{H}\}$
- soit $d(\Omega,\mathscr{D})<\mathrm{R}$ et alors $\mathscr{D}\cap\mathscr{C}=\{\mathrm{A},\mathrm{B}\}$ avec H milieu de [AB]
Les tangentes au cercle seront donc les droites situées à une distance R du centre du cercle

Une tangente Δ à $\mathscr{C}_0$ qui passe par $\mathrm{I}(-2,-1)$ est une droite d'équation $\Delta :\ ax+by+c=0$ où $\begin{cases}(a,b,c)\in\mathbb{R}^3\\(a,b)\neq(0,0)\end{cases}$

- Soit $b=0$ (et donc $a\neq 0$) et l'équation peut s'écrire sous forme réduite $\Delta :\ x=k$ où $k\in\mathbb{R}$
puisque $\mathrm{I}(-2,-1)\in\Delta$, on aura: $k=-2$. Or, la droite d'équation $x=-2$ ne rencontre pas $\mathscr{C}_0$ donc ce n'est pas une tangente à C_0
- Soit $b\neq 0$ et l'équation peut s'écrire sous forme réduite $y=\alpha x+p$ avec $(\alpha,p)\in\mathbb{R}^2$ (α pente de la droite et p ordonnée à l'origine) Puisque $\mathrm{I}\in\Delta$, on a $-1=-2\alpha+p$ et donc $\Delta :\ y=\alpha x+2\alpha-1$

Δ est tangente à $\mathscr{C}_0$ si $d(\mathrm{I}_0,\Delta)=\mathrm{R}_0 \Leftrightarrow \mathrm{I}_0\mathrm{H}=\mathrm{R}_0$ où H est le projeté orthogonal de $\mathrm{I}_0=\mathrm{O}(0,0)$ sur Δ et $\mathrm{R}_0=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Autrement dit: Δ est tangente à $\mathscr{C}_0 \Leftrightarrow \mathrm{OH}^2=\dfrac{1}{2}$

On doit donc déterminer le projeté orthogonal H de O sur $\Delta : y=\alpha x+2\alpha-1$

Le projeté orthogonal H de M sur une droite $\mathscr{D}$ est situé à l'intersection de $\mathscr{D}$ et de la normale $\mathscr{D}'$ à $\mathscr{D}$ issue de M et dirigée par un vecteur $\vec{n}$ normal à $\mathscr{D}$
On choisit une représentation cartésienne pour l'une des droites et paramétrique pour l'autre de sorte qu'il n'y a qu'un paramètre dans les coordonnées de H issues de la représentation paramétrique à trouver en les injectant dans l'équation cartésienne

H est situé à l'intersection de Δ et de la normale Δ' à Δ issue de O (aussi $\Delta'=\mathrm{O}+\mathrm{Vect}(\vec{n})$ où $\vec{n}$ est un vecteur normal de Δ)
On connaît une représentation cartésienne de Δ aussi on choisit une représentation paramétrique de Δ':

$\Delta'=\mathrm{O}+\mathrm{Vect}(\vec{n})$ où $\vec{n}\begin{pmatrix}\alpha\\-1\end{pmatrix}$ vu que $\Delta :\ \alpha x-y+2\alpha-1=0$. Ainsi: $\mathrm{H}\in\Delta' \Leftrightarrow \exists t\in\mathbb{R},\ \mathrm{H}(0+\alpha t,0-t)=(\alpha t,-t)$

Or: $\mathrm{H}\in\Delta \Leftrightarrow -t=\alpha^2 t+2\alpha-1 \Leftrightarrow_{1+\alpha^2\neq 0} t=\dfrac{1-2\alpha}{1+\alpha^2}$ puis $\mathrm{OH}^2=t^2\alpha^2+t^2=(1+\alpha^2)\times\dfrac{(1-2\alpha)^2}{(1+\alpha^2)^2}=\dfrac{(1-2\alpha)^2}{1+\alpha^2}$

Déterminons maintenant α pour que $\mathrm{OH}^2=\dfrac{1}{2}$:

$\mathrm{OH}^2=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{(1-2\alpha)^2}{1+\alpha^2}=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 2(1-2\alpha)^2=1+\alpha^2 \Leftrightarrow 7\alpha^2-8\alpha+1=0 \Leftrightarrow 7(\alpha-1)(\alpha-\frac{1}{7})=0 \Leftrightarrow \alpha=1$ ou $\alpha=\dfrac{1}{7}$
En substituant dans $\Delta : y=\alpha x+2\alpha-1$, on trouve $\boxed{\text{les deux tangentes } \Delta_1 :\ x-y+1=0 \text{ et } \Delta_2 :\ x-7y-5=0}$

4. Prouver que Δ_1 et Δ_2 sont des tangentes communes tous les cercles $\mathscr{C}_m$ pour $m\neq -1$.

Il s'agit de vérifier que, pour $m\neq -1$: $d(\mathrm{I}_m,\Delta_1)=\mathrm{R}_m=d(\mathrm{I}_m,\Delta_2) \Leftrightarrow \mathrm{I}_m\mathrm{H}_m^2=\mathrm{R}_m^2=\mathrm{I}_m\mathrm{H}_m'^2$ avec
H_m (resp. H'_m) le projeté orthogonal de $\mathrm{I}_m(2m,m)$ sur $\Delta_1 :\ x-y+1=0$ (resp. $\Delta_2 :\ x-7y-5=0$)
On utilise une représentation paramétrique de la normale Δ'_1 (resp. Δ'_2) issue de I_m à Δ_1 (resp. Δ_2):

$$\Delta'_1=\mathrm{I}_m+\mathrm{Vect}(\vec{n}_1\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix})\ (\text{resp. } \Delta'_2=\mathrm{I}_m+\mathrm{Vect}(\vec{n}_2\begin{pmatrix}1\\-7\end{pmatrix}))$$

$\mathrm{H}_m\in\Delta'_1\cap\Delta_1 \Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R},\ \mathrm{H}_m(2m+\lambda,m-\lambda)$ et $(2m+\lambda)-(m-\lambda)+1=0 \Leftrightarrow \lambda=\dfrac{-1-m}{2}$

$\mathrm{H}'_m\in\Delta'_2\cap\Delta_2 \Leftrightarrow \exists\mu\in\mathbb{R},\ \mathrm{H}'_m(2m+\mu,m-7\mu)$ et $(2m+\mu)-7(m-7\mu)-5=0 \Leftrightarrow \mu=\dfrac{1}{50}(5m+5)=\dfrac{m+1}{10}$

Alors: $\mathrm{I}_m\mathrm{H}_m^2=\lambda^2+\lambda^2=2\lambda^2=\dfrac{(m+1)^2}{2}=\mathrm{R}_m^2$ et $\mathrm{I}_m\mathrm{H}_m'^2=\mu^2+(-7\mu)^2=50\mu^2=50\times\dfrac{(m+1)^2}{100}=\dfrac{(m+1)^2}{2}=\mathrm{R}_m^2$

On a donc bien vérifié que $\boxed{\Delta_1 \text{ et } \Delta_2 \text{ sont des tangentes au cercle } \mathscr{C}_m \text{ pour } m\neq -1}$

EXEMPLE 2 Reconnaître et esquisser les courbes :

4) $y^2-4y-4x^2=0$ Sur le dessin en bleu.

$y^2-4y-4x^2=0 \Leftrightarrow (y-2)^2-4-4x^2=0 \Leftrightarrow (y-2)^2-4x^2=4 \Leftrightarrow \dfrac{(y-2)^2}{2^2}-\dfrac{x^2}{1^2}=1$

On reconnaît donc une hyperbole de centre $\Omega(0,2)$, d'axes de symétries $\Omega+\mathrm{Vect}(\vec{\imath})$ et $\Omega+\mathrm{Vect}(\vec{\jmath})$ (axe focal) avec $a=2$ et $b=1$, de sommets $\mathrm{B}(0,2)$ et $\mathrm{B}'(0,0)$ et d'asymptotes $\Omega+\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\ \pm 2\end{pmatrix}\right)$

5) $y^2+4y+4x^2=0$ Sur le dessin en gris.

$y^2+4y+4x^2=0 \Leftrightarrow (y+2)^2-4+4x^2=0 \Leftrightarrow \dfrac{(y+2)^2}{2^2}+\dfrac{x^2}{1^2}=1$

On reconnaît une ellipse de centre $\Omega(0,-2)$, d'axes de symétries $\Omega+\mathrm{Vect}(\vec{\imath})$ et $\Omega+\mathrm{Vect}(\vec{\jmath})$, de sommets $\mathrm{A}(-1,-2)$, $\mathrm{A}'(1,-2)$, $\mathrm{B}(0,0)$ et $\mathrm{B}'(0,-4)$

5.5) $2x^2-y^2+4x-4y-1=0$ Sur le dessin en rouge.

$$\begin{aligned}2x^2-y^2+4x-4y-1=0 \Leftrightarrow 2\left(x^2+2x\right)-\left(y^2+4y\right)-1=0 &\Leftrightarrow 2\left((x+1)^2-1\right)-\left((y+2)^2-4\right)-1=0\\ &\Leftrightarrow 2(x+1)^2-(y+2)^2=1+2-4=-1\\ &\Leftrightarrow -\frac{(x+1)^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}+\frac{(y+2)^2}{1^2}=1\end{aligned}$$

On reconnaît une hyperbole de centre $\Omega(-1,-2)$, d'axes de symétries $\Omega+\mathrm{Vect}(\vec{\imath})$ et $\Omega+\mathrm{Vect}(\vec{\jmath})$ (axe focal), de sommets $\mathrm{A}(-1,-1)$ et $\mathrm{A}'(-1,-3)$ et d'asymptotes $\Omega+\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \pm 1\end{pmatrix}\right)$

7) $\begin{cases} x=2-\sin(t)\\ y=-1+4\cos(t)\end{cases}, t\in\mathbb{R}$ Représentée en orange.

$\begin{cases} x=2-\sin(t)\\ y=-1+4\cos(t)\end{cases}, t\in\mathbb{R} \Leftrightarrow_{s=\frac{\pi}{2}+t} \begin{cases} x=2+\cos s\\ y=-1+4\sin(s)\end{cases}, s\in\mathbb{R}$

On reconnaît une ellipse de centre $\Omega(2,-1)$, d'axes de symétrie $\Omega+\mathrm{Vect}(\vec{\imath})$ et $\Omega+\mathrm{Vect}(\vec{\jmath})$ avec $a=1$ et $b=4$, de sommets $\mathrm{A}(1,-1)$, $\mathrm{A}'(3,-1)$, $\mathrm{B}(2,-5)$ et $\mathrm{B}'(2,3)$