

EXEMPLE 2 LE 1), LE 2) ET LE 3)

1. Nature de la série $\sum u_n$ où $u_n = \frac{1}{e^n + (-1)^n \sqrt{n}}$

On cherche un équivalent de u_n pour éliminer la DVG et obtenir le signe lorsque n est grand.

Par croissance comparée : $(-1)^n \sqrt{n} = o(e^n)$ car $\left| \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{e^n} \right| = n^{\frac{1}{2}} e^{-n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Alors : $u_n = \frac{1}{e^n + o(e^n)} \sim \frac{1}{e^n}$ et $\frac{1}{e^n} > 0$ donc, par critère d'équivalence, $\sum u_n$ et $\sum \frac{1}{e^n}$ ont la même nature.

Or, $\sum \frac{1}{e^n} = \sum \left(\frac{1}{e}\right)^n$ est une série géométrique de raison $q = \frac{1}{e}$ avec $|q| < 1$ donc elle converge.

Ainsi, la série $\sum u_n$ où $u_n = \frac{1}{e^n + (-1)^n \sqrt{n}}$ converge

2. Nature de la série $\sum u_n$ où $u_n = \cos \frac{1}{\sqrt{n}} - \operatorname{ch} \frac{1}{\sqrt{n}}$

On cherche un équivalent de u_n pour éliminer la DVG et obtenir le signe lorsque n est grand.

Pour cela, on utilise des DL₂(0) : $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ et $\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ avec $x = \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Alors : $u_n = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = -\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \sim -\frac{1}{n}$

Alors : $u_n \sim -\frac{1}{n}$ et $-\frac{1}{n} < 0$ donc, par critère d'équivalence, les séries $\sum u_n$ et $\sum \left(-\frac{1}{n}\right)$ sont de même nature.

Or $\sum \left(-\frac{1}{n}\right) = -\sum \frac{1}{n}$ est une série de Riemann avec $\alpha = 1 \leq 1$ donc qui est divergente.

Ainsi, la série $\sum u_n$ où $u_n = \cos \frac{1}{\sqrt{n}} - \operatorname{ch} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge

3. Nature de $\sum u_n$ où $u_n = \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$

On cherche un équivalent de u_n pour éliminer la DVG et obtenir le signe lorsque n est grand.

On repère une puissance du type $b_n^{a_n}$ où la base b_n et l'exposant a_n bouge en même temps avec n : on sait qu'il faut alors passer en écriture exponentielle : $b_n^{a_n} = \exp(a_n \ln b_n)$

On a : $n^{1+\frac{1}{n}} = \exp\left((1+\frac{1}{n}) \ln n\right) = e^{\ln n} e^{\frac{\ln n}{n}}$

Or : $\frac{\ln n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ (par croissance comparée) donc $e^{\frac{\ln n}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ et, par suite : $n^{1+\frac{1}{n}} \sim e^{\ln n} \times 1 = n \Rightarrow u_n = \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}} \sim \frac{1}{n}$

Alors : $\begin{cases} u_n \sim \frac{1}{n} > 0 \\ \sum \frac{1}{n} \text{ DV car de Riemann avec } \alpha = 1 \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\sum u_n \text{ DV}}$

EXEMPLE 3 Justifier l'existence et calculer la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ où $u_n = \frac{1}{n^2 + 3n + 2} + \frac{e^{n-1}}{3^{n+1}}$

On écrit $u_n = v_n + w_n$ où $v_n = \frac{1}{n^2 + 3n + 2}$ et $w_n = \frac{e^{n-1}}{4^{n+1}}$

• $v_n = \frac{1}{n^2 + 3n + 2} \sim \frac{1}{n^2}$ et $\frac{1}{n^2} > 0$ donc, par équivalence, $\sum v_n$ de même nature que $\sum \frac{1}{n^2}$ qui CV car de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$

• $w_n = \frac{e^{n-1}}{4^{n+1}} = \frac{1}{3e} \times \left(\frac{e}{3}\right)^n$ est une série géométrique de raison $q = \frac{e}{3}$ avec $|q| < 1$ ($e \approx 2,7$) donc $\sum w_n$ CV

Ainsi, puisque $u_n = v_n + w_n$, alors par somme de séries convergentes, $\boxed{\sum u_n \text{ CV}}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n + \sum_{n=1}^{+\infty} w_n$

Calcul de la somme : $\sum_{n=1}^{+\infty} w_n = \frac{1}{3e} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{e}{3}\right)^n = \frac{1}{3e} \times \frac{e}{3} \times \frac{1}{1 - \frac{e}{3}} = \frac{1}{3(3-e)}$

Et : $v_n = \frac{1}{n^2 + 3n + 2} = \frac{1}{(n+2)(n+1)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$ et on reconnaît une somme télescopique donc : $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = \frac{1}{1+1} - 0 = \frac{1}{2}$

Ainsi : $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3(3-e)}}$

EXERCICE N° 1

1. Justifier l'existence de $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ où $u_n = \text{Arctan} \frac{2n}{n^4 + n^2 + 2}$

On a : $\begin{cases} \text{Arctan } x \sim_0 x \\ x = \frac{2n}{n^4 + n^2 + 2} \sim \frac{2n}{n^4} \sim \frac{2}{n^3} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{cases} \Rightarrow u_n \sim \frac{2n}{n^4 + n^2 + 2} \sim \frac{2}{n^3} > 0$ (Attention à la rédaction!)

Par critère d'équivalence, on sait que $\sum u_n$ a la même nature que $\sum \frac{2}{n^3}$

Or : $\sum \frac{2}{n^3}$ CV (Riemann avec $\alpha = 3$) donc $\sum u_n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ existe

2. Prouver que, pour $x > 0$ et $y > 0$ alors : $\text{Arctan } x - \text{Arctan } y = \text{Arctan} \frac{x-y}{1+xy}$

On rappelle que Arctan est C^0 sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, qu'elle est impaire et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

On rappelle aussi que $\tan(\text{Arctan } x) = x$ pour tout x réel mais que $\text{Arctan}(\tan x)$ ne vaut x que si $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

On introduit $A = \text{Arctan } x - \text{Arctan } y$ et $B = \text{Arctan} \frac{x-y}{1+xy}$

Ces deux réels existent pour $x > 0$ et $y > 0$ car Arctan définie sur $\mathbb{R}$ et $1+xy > 1$ donc non nul.

On sait aussi que : $B \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et que :

$x > 0$ et $y > 0 \Rightarrow \text{Arctan } x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et $\text{Arctan } y \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\Rightarrow \text{Arctan } x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et $-\text{Arctan } y \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[\Rightarrow A \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

Le calcul de $\tan A$ et $\tan B$ est donc possible et on a : Rappel : $\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$

$$\tan A = \frac{\tan(\text{Arctan } x) - \tan(\text{Arctan } y)}{1 + \tan(\text{Arctan } x) \tan(\text{Arctan } y)} = \frac{x-y}{1+xy} = \tan B$$

or la restriction de la fonction $\tan$ à $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ est bijective aussi on a nécessairement $A = B$

Attention! L'argument de bijectivité est essentiel

Par exemple : $\tan \frac{\pi}{4} = \tan \frac{5\pi}{4} = 1$ mais $\frac{\pi}{4} \neq \frac{5\pi}{4} \dots$

Une égalité $\tan A = \tan B$ aboutit à $A = B$ seulement si A et B sont dans un même intervalle du type $\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$ où $k \in \mathbb{Z}$ sur lequel la restriction de tangente réalise bien une bijection.

3. Développer $(n^2 + n + 1)(n^2 - n + 1)$ et $(n+1)^2 - (n+1) + 1$

$(n^2 + n + 1)(n^2 - n + 1) = n^4 - n^3 + n^2 + n^3 - n^2 + n + n^2 - n + 1 = n^4 + n^2 + 1 = (n^2 + n + 1)(n^2 - n + 1)$

et $(n+1)^2 - (n+1) + 1 = n^2 + 2n + 1 - n - 1 + 1 = n^2 + n + 1 = (n+1)^2 - (n+1) + 1$

4. Calculer alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$

On remarque que : $2n = (n^2 + n + 1) - (n^2 - n + 1)$ et, avec ce qui précède : $1 + (n^2 + n + 1)(n^2 - n + 1) = n^4 + n^2 + 2$

Aussi : $u_n = \text{Arctan} \left(\frac{(n^2 + n + 1) - (n^2 - n + 1)}{(n^2 + n + 1)(n^2 - n + 1)} \right)$

Alors, en utilisant la question 2, avec $x = n^2 + n + 1 > 0$ et $y = n^2 - n + 1 > 0$ ($\Delta < 0$), on a :

$u_n = \text{Arctan}(n^2 + n + 1) - \text{Arctan}(n^2 - n + 1) = \text{Arctan}((n+1)^2 - (n+1) + 1) - \text{Arctan}(n^2 - n + 1)$

autrement dit : $u_n = v_{n+1} - v_n$ où $v_n = \text{Arctan}(n^2 - n + 1)$ aussi on reconnaît une somme télescopique et

$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - v_0 = \frac{\pi}{2} - \text{Arctan } 1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$

EXERCICE N° 3 LE 1) ET LE 2)

1) Justifier l'existence et calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ où $u_n = \frac{1}{4n^2 - 1}$

$u_n \sim \frac{1}{4n^2}$ et $\frac{1}{4n^2} > 0$ aussi, par critère équivalence, $\sum u_n$ de même nature que $\sum \frac{1}{4n^2}$ qui CV (Riemann avec $\alpha = 2 > 1$) donc

$\sum u_n$ CV et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ existe. De plus : $u_n = \frac{1}{(2n+1)(2n-1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$ en écrivant $\frac{1}{(2n+1)(2n-1)} = \frac{a}{2n-1} + \frac{b}{2n+1}$ (à faire)

Aussi : $u_n = a_n - a_{n+1}$ où $a_n = \frac{1}{2(2n-1)}$ et on reconnaît une somme télescopique : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = a_0 - \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\frac{1}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$

2) Justifier l'existence et calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ où $u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} - \frac{2}{n+3}$

$u_n = \frac{(n+2)(n+3) + (n+1)(n+3) - 2(n+1)(n+2)}{(n+1)(n+2)(n+3)} \sim \frac{5n+4n-2 \times 3n}{n^3} \sim \frac{3n}{n^3} \sim \frac{3}{n^2}$ et $\frac{3}{n^2} > 0$ donc, par équivalence, $\sum u_n$ a la même nature que $\sum \frac{3}{n^2} = 3 \sum \frac{1}{n^2}$ qui est une série de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$ donc qui converge aussi

$\sum u_n$ CV et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ existe.

Attention : $u_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}$ mais $\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3}$ n'est pas télescopique!

On sait que : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{N \rightarrow +\infty} S_N$ où : $S_N = \sum_{n=0}^N \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} - \frac{2}{n+3} \right) = \sum_{n=0}^N \frac{1}{n+1} + \sum_{n=0}^N \frac{1}{n+2} - 2 \sum_{n=0}^N \frac{1}{n+3}$

Calculons la somme partielle d'ordre N en utilisant des changements d'indice : on pose $k = n+1$ dans la première somme, $k = n+2$ dans la seconde et $k = n+3$ dans la troisième.

$S_N = \sum_{k=1}^{N+1} \frac{1}{k} + \sum_{k=2}^{N+2} \frac{1}{k} - 2 \sum_{k=3}^{N+3} \frac{1}{k}$ et on repère une partie commune dans ces sommes (pour $k \in \llbracket 3, N+1 \rrbracket$) qu'on isole

$S_N = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \sum_{k=3}^{N+1} \frac{1}{k} + \frac{1}{2} + \sum_{k=3}^{N+1} \frac{1}{k} + \frac{1}{N+2} - 2 \left(\sum_{k=3}^{N+1} \frac{1}{k} + \frac{1}{N+2} + \frac{1}{N+3} \right)$ les termes avec des symboles $\sum$ se simplifient

$S_N = 2 - \frac{1}{N+2} - \frac{2}{N+3} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 2$ de sorte que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{N \rightarrow +\infty} S_N = 2$

EXEMPLE 2 LE 4) ET LE 5)

4) Nature de $\sum u_n$ où $u_n = \ln \left(\frac{n^2 + n + 1}{n^2 + n - 1} \right)$

On cherche un équivalent de u_n pour préciser le signe et éliminer une divergence grossière. Attention à ne pas faire de composition d'équivalent : $a_n \sim b_n$ n'entraîne pas $\ln a_n \sim \ln b_n$! On cherche un équivalent usuel en $\ln(1+x)$

$u_n = \ln \left(\frac{(n^2 + n - 1) + 2}{n^2 + n - 1} \right) = \ln \left(1 + \frac{2}{n^2 + n - 1} \right) \sim \frac{2}{n^2 + n - 1} \sim \frac{2}{n^2}$ avec $\ln(1+x) \sim_0 x$ et $x = \frac{2}{n^2 + n - 1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

On peut conclure par critère d'équivalence : $\begin{cases} u_n \sim \frac{2}{n^2} > 0 \\ \sum \frac{2}{n^2} = 2 \sum \frac{1}{n^2} \text{ CV car Riemann avec } \alpha = 2 > 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\sum u_n \text{ CV}}$

5) Nature de $\sum u_n$ où $u_n = \left(\operatorname{ch} \frac{1}{n} \right)^{-n^3}$

On cherche un équivalent de u_n pour préciser le signe et éliminer une divergence grossière.

On identifie une puissance $b_n^{a_n}$ qu'on écrit sous forme exponentielle : $\exp(a_n \ln b_n)$ On a : $u_n = \exp \left(-n^3 \ln \left(\operatorname{ch} \frac{1}{n} \right) \right)$

On utilise des DL pour préciser l'expression à l'intérieur de l'exponentielle : $\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ avec $x = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

$\ln \left(\operatorname{ch} \frac{1}{n} \right) = \ln \left(1 + \frac{1}{2n^2} + o \left(\frac{1}{n^2} \right) \right) = \frac{1}{2n^2} + o \left(\frac{1}{n^2} \right) \sim \frac{1}{2n^2}$ car $\ln(1+x) \sim x$ avec $x = \frac{1}{2n^2} + o \left(\frac{1}{n^2} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Alors : $\ln u_n = -n^3 \ln \left(\operatorname{ch} \frac{1}{n} \right) \sim \frac{-n}{2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty \Rightarrow u_n = e^{\ln u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ ce qui élimine la divergence grossière.

On doit être plus précis pour obtenir l'équivalent : $\ln \left(\operatorname{ch} \frac{1}{n} \right) = \ln \left(1 + \frac{1}{2n^2} + o \left(\frac{1}{n^3} \right) \right)$ car $\operatorname{ch} x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$ (parité)

Alors : $\ln u_n = -n^3 \ln \left(\operatorname{ch} \frac{1}{n} \right) = -\frac{n}{2} + o(1)$ puis : $u_n = e^{\ln u_n} = \left(\frac{1}{\sqrt{e}} \right)^n \times e^{o(1)} \sim \left(\frac{1}{\sqrt{e}} \right)^n \times 1$

Finalement : $\begin{cases} u_n \sim \left(\frac{1}{\sqrt{e}} \right)^n > 0 \\ \sum \left(\frac{1}{\sqrt{e}} \right)^n \text{ CV car géométrique avec } 0 < \frac{1}{\sqrt{e}} < 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\sum u_n \text{ CV}}$