PT : CORRECTION DU TD N° 1 SUR LE CHAPITRE XII

EXERCICE N° 0 *Étude d'un test (un classique)*

Une usine fabrique des pièces avec une proportion de 10% de pièces défectueuses. Avant mise sur le marché, on leur fait passer un test qui permet d'accepter 90% des bonnes pièces et de retirer 90% des mauvaises.

1. Quelle est la probabilité qu'une pièce (bonne ou mauvaise) soit acceptée à l'issue du test ?

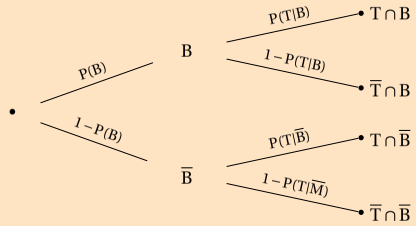
2. Quelle est la probabilité qu'une bonne pièce ne soit pas acceptée au test ?

3. Quelle est la probabilité qu'une pièce soit mauvaise bien qu'elle soit acceptée au test ?

4. Quelle est la probabilité qu'il y ait une erreur lors du test ?

Introduisons les événements B :« la pièce est de bonne qualité » et T :« le test est positif »
Les informations fournies par le sujet sur
- la proportion de pièces défectueuses donne $P(B) = 0.9$ et $P(\overline{B}) = 0.1$
- la performance des tests donnent les probabilités $P(T|B) = 0.9$, $P(\overline{T}|B) = 0.1$, $P(\overline{T}|\overline{B}) = 0.9$ et $P(T|\overline{B}) = 0.1$

Ces informations invitent à modéliser la situation avec l'arbre pondéré construit sur le système complet $\{B, \overline{B}\}$:



1. Dans cette question, on demande le calcul de P(T). En utilisant la formule des probabilités totales :

$$P(T) = P(B \cap T) + P(\overline{B} \cap T) = P(B)P(T|B) + P(\overline{B})P(T|\overline{B}) = 0.9 \times 0.9 + 0.1 \times 0.1 = \frac{81+1}{100} = 0.82$$

2. Dans cette question, on demande le calcul de $P(B|\overline{T})$. On va donc utiliser un renversement du conditionnement

$$P(B|\overline{T}) = \frac{P(B \cap \overline{T})}{P(\overline{T})} = \frac{P(B) \times P(\overline{T}|B)}{1 - P(T)} = \frac{0.9 \times 0.1}{1 - 0.82} = \frac{9}{100} \times \frac{100}{18} = \frac{1}{2}$$

3. Dans cette question, on demande le calcul de $P(\overline{B}|T)$ qu'on obtient, là encore, en renversant le conditionnement

$$P(\overline{B}|T) = \frac{P(\overline{B} \cap T)}{P(T)} = \frac{P(\overline{B}) \times P(T|\overline{B})}{P(T)} = \frac{0.1 \times 0.1}{0.82} = \frac{1}{100} \times \frac{100}{82} = \frac{1}{82} \simeq 0.012$$

4. Dans cette question, on calcule la probabilité de l'événement $E = (B \cap \overline{T}) \cup (\overline{B} \cap T)$
Dans cette union, les deux événements sont incompatibles donc :

$$P(E) = P(B \cap \overline{T}) + P(\overline{B} \cap T) = P(B) \times P(\overline{T}|B) + P(\overline{B}) \times P(T|\overline{B}) = 0.9 \times 0.1 + 0.1 \times 0.1 = \frac{10}{100} = 0.1$$

EXERCICE N° 1 Chaque matin, Baptiste arrive en retard ou pas en cours. S'il est arrivé en retard un jour donné, il sera à l'heure le jour suivant avec une probabilité $p \in]0,1[$. S'il est à l'heure un jour donné, il sera en retard le jour suivant avec une probabilité $q \in]0,1[$. On note r_n (resp. h_n) la probabilité que Baptiste soit en retard le jour n (resp. soit à l'heure le jour n).

1. Justifier l'existence d'une matrice A de $M_2(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\begin{pmatrix} r_{n+1} \\ h_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} r_n \\ h_n \end{pmatrix}$

Notons R_n (resp H_n) l'événement « Valentin est en retard (resp. à l'heure) le jour n »
$\{H_n, R_n\}$ réalise une partition de Ω et on a : $H_n \cup R_n = \Omega$ ie $r_n + h_n = 1$
De plus, le sujet donne : $P(R_{n+1}|H_n) = q = 1 - P(H_{n+1}|H_n)$ et $P(H_{n+1}|R_n) = p = 1 - P(R_{n+1}|R_n)$
Avec le système complet d'événements $\{H_n, R_n\}$, la formule des probabilités totales donne :

$$r_{n+1} = P(R_{n+1}) = P(H_n) \times P(R_{n+1}|H_n) + P(R_n) \times P(R_{n+1}|R_n) = h_n \times q + r_n \times (1-p)$$

et ainsi : $h_{n+1} = 1 - r_{n+1} = 1 - qh_n - r_n + pr_n = h_n(1-q) + pr_n$

Finalement : $\begin{pmatrix} r_{n+1} \\ h_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_n \\ h_n \end{pmatrix}$ d'où $\boxed{A = \begin{pmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{pmatrix}}$

2. Méthode 1 : Réduire la matrice A. En déduire r_n et h_n en fonction de n

Soit λ et μ les 2 valeurs propres (complexes) de A : $\begin{cases} \lambda\mu = \det(A) = (1-p)(1-q) - pq = 1 - p - q \\ \lambda + \mu = \mathrm{tr}(A) = 2 - p - q \end{cases}$
de sorte que λ et μ sont les racines de $\chi_A(x) = x^2 - (2-p-q)x + (1-p-q)$.
Le discriminant est : $(2-p-q)^2 - 4(1-p-q) = p^2 + q^2 + 2pq = (p+q)^2 > 0$ aussi il y a 2 racines réelles

$$\lambda = \frac{2-p-q+p+q}{2} = 1 \quad \text{et} \quad \mu = \frac{2-p-q-p-q}{2} = 1 - p - q$$

Elles sont distinctes : $\lambda = \mu \Leftrightarrow p + q = 0 \Leftrightarrow p = q = 0$ puisque $p \geqslant 0$ et $q \geqslant 0$ ce qui est absurde car $p > 0$ et $q > 0$.
A est donc diagonalisable car χ_A est scindé à racines simples et les sev propres sont de dimension 1 et :

$\mathrm{Ker}\,(A - I_2) = \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} -p & q \\ p & -q \end{pmatrix} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}\right)$ et $\mathrm{Ker}\,(A - (1-p-q)I_2) = \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} q & q \\ p & p \end{pmatrix} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

Notons $Q = \begin{pmatrix} q & -1 \\ p & 1 \end{pmatrix}$ la matrice de passage alors : $Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-p-q \end{pmatrix} = D$
Par une récurrence immédiate, on a : $\begin{pmatrix} r_n \\ h_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} r_0 \\ h_0 \end{pmatrix}$ or : $A^n = QD^nQ^{-1}$ aussi on calcule Q^{-1} :

$Q \sim_L \begin{pmatrix} p+q & 0 \\ p & 1 \end{pmatrix}_{L_1 \leftarrow L_1 + L_2} \sim_L \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & 1 \end{pmatrix}_{L_1 \leftarrow \frac{1}{p+q} L_1} \sim_L \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{L_2 \leftarrow L_2 - pL_1}$ et on applique les mêmes opérations à I_2

$I_2 \sim_L \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim_L \begin{pmatrix} \frac{1}{p+q} & \frac{1}{p+q} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim_L \begin{pmatrix} \frac{1}{p+q} & \frac{1}{p+q} \\ \frac{-p}{p+q} & \frac{q}{p+q} \end{pmatrix}$ et $Q^{-1} = \frac{1}{p+q} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -p & q \end{pmatrix}$ par le théorème de Gauss-Jordan

Alors : $\begin{pmatrix} r_n \\ h_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q & -1 \\ p & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (1-p-q)^n \end{pmatrix} \times \frac{1}{p+q} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -p & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_0 \\ h_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{p+q} \begin{pmatrix} q & -(1-p-q)^n \\ p & (1-p-q)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -pr_0 + qh_0 \end{pmatrix}$

d'où : $\boxed{r_n = \frac{q - (qh_0 - pr_0)(1-p-q)^n}{p+q}}$ et $\boxed{h_n = \frac{p + (qh_0 - pr_0)(1-p-q)^n}{p+q}}$ (Rem : $r_n + h_n = 1$!)

3. Méthode 2 : Vérifier que (r_n) est une suite arithmético-géométrique. Déterminer r_n puis h_n.

$r_{n+1} = (1-p)r_n + qh_n = (1-p)r_n + q(1-r_n) = (1-p-q)r_n + q$ donc (r_n) est arithmético-géométrique.
On a : $\ell = (1-p-q)\ell + q \Leftrightarrow \ell = \frac{q}{p+q}$ et on vérifie que $(v_n) = (r_n - \ell)$ est géométrique de raison $1-p-q$:

$$v_{n+1} = r_{n+1} - \ell = (1-p-q)r_n + q - \big((1-p-q)\ell + q\big) = (1-p-q)(r_n - \ell) = (1-p-q)v_n$$

$r_n - \ell = v_n = v_0(1-p-q)^n$ or $v_0 = \frac{pr_0 - qh_0}{p+q}$ donc : $r_n = \frac{q}{p+q} + \frac{pr_0 - qh_0}{p+q}(1-p-q)^n$ et $h_n = 1 - r_n = \ldots$

4. Étudier la limite de r_n et h_n lorsque n tend vers $+\infty$

On sait que : $0 < p + q < 2 \Rightarrow -2 < -p - q < 0 \Rightarrow -1 < 1 - p - q < 1 \Rightarrow |1 - p - q| < 1$ alors $(1-p-q)^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ et donc :

$\boxed{r_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{q}{p+q}}$ et $\boxed{h_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{p}{p+q}}$