

EXERCICE N° 1

Montrer que l'endomorphisme f associé à la matrice A est une isométrie.

Caractériser géométriquement cet endomorphisme.

$$1) A = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} -7 & 24 \\ 24 & 7 \end{pmatrix} \quad 2) A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$$

1) • Comme la base canonique est une base orthonormée, on sait que : f est une isométrie $\Leftrightarrow A \in O_2(\mathbb{R})$

On obtient que $A \in O_2(\mathbb{R})$ en vérifiant que ses colonnes forment une base orthonormée.

Notons C_1 et C_2 les colonnes de A , il est clair que $C_1 \cdot C_2 = 0$ et $\|C_1\|^2 = \|C_2\|^2 = \frac{7^2 + 24^2}{25^2} = \frac{49 + 16 \times 36}{625} = \frac{49 + 576}{625} = 1$

• Décrivons maintenant géométriquement f : on sait que $\det(A) = \pm 1$ or : $\det A = \frac{1}{25^2}(-7 - 24 \times 24) < 0$ (pas la

peine d'être plus précis!) donc f est une isométrie indirecte de $\mathbb{R}^2$ donc f est une réflexion de $\mathbb{R}^2$

Une réflexion est une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan donc ici c'est une symétrie orthogonale par rapport à un axe.

Précisons son axe, il s'agit de l'ensemble des vecteurs invariants soit $\text{Ker}(f - id) = \text{Ker}(A - I_2)$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in D = \text{Ker}(A - I_2) = \text{Ker} \begin{pmatrix} -32 & 24 \\ 24 & -18 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -32x + 24y = 0 \\ 24x - 18y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8(4x - 3y) = 0 \\ 6(4x - 3y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow 4x = 3y$$

Ainsi, f est la réflexion plane d'axe $D = \text{Vect}((3, 4))$ la droite vectorielle d'équation $ax + by = 0$ est dirigée par $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$

2) • Comme la base canonique est une base orthonormée, on sait que : f est une isométrie $\Leftrightarrow A \in O_3(\mathbb{R})$

Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de A , on vérifie :

$$C_1 \cdot C_2 = \frac{3+3-6}{16} = 0, \quad \|C_1\|^2 = \|C_2\|^2 = \frac{9+1+6}{16} = 1 \quad \text{et} \quad C_1 \wedge C_2 = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 4\sqrt{6} \\ -4\sqrt{6} \\ 8 \end{pmatrix} = C_3$$

Ne pas oublier le coefficient devant la matrice pour les normes!

(C_1, C_2, C_3) est une BOND $\Rightarrow A \in SO_3(\mathbb{R})$ (car matrice de passage de la base canonique BOND en une BOND)

Le calcul du déterminant est inutile pour conclure et serait une perte de temps!

Puisque $A \in SO_3(\mathbb{R})$, f est une rotation vectorielle. On précise alors l'axe D et l'angle θ de cette rotation.

Pensez à bien poser vos notations!

• L'axe est l'ensemble des vecteurs invariants : $D = \text{Ker}(A - I_3) = \text{Ker} \begin{pmatrix} -1 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & -1 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & -2 \end{pmatrix}$

D'après le cours : $\dim D = 1$ et on remarque $(1, 1, 0) \in D$ aussi l'axe est $D = \text{Vect}(\vec{u})$ où $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)$

On connaît la dimension ce qui permet de conclure en ne cherchant qu'un seul vecteur à l'aide de combinaison sur les colonnes.

• Pour obtenir θ , on sait que, dans une BON $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ adaptée, f aura pour matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$

Aussi, on a : $1 + 2 \cos \theta = \text{tr}(f) = \text{tr}(A) = \frac{3+3+2}{4} = 2 \Leftrightarrow \cos \theta = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \theta = \pm \arccos \frac{1}{2} = \pm \frac{\pi}{3}$

On rappelle que la trace de f se calcule sur n'importe laquelle des matrices de f !

On précise le signe de $\sin \theta$ en utilisant un vecteur unitaire $\vec{v} \in D^\perp$ puisque on sait :

$$f(\vec{v}) = (\cos \theta) \vec{v} + (\sin \theta) \vec{w} \Rightarrow \vec{v} \wedge f(\vec{v}) = (\sin \theta) \vec{u}$$

Il nous suffit de comparer seulement la première coordonnée de $\vec{v} \wedge f(\vec{v})$ et celle de $\vec{u}$ pour avoir le signe de $\sin \theta$
- on choisit $\vec{v}$ unitaire orthogonal à $\vec{u}$: par exemple $\vec{v} = (0, 0, 1)$ convient

- on mène les calculs à l'aide de A : $f(v) = A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \sqrt{6} \\ -\sqrt{6} \\ 2 \end{pmatrix}$ d'où $v \wedge f(v) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \sqrt{6} \\ ? \\ ?? \end{pmatrix} = (\sin \theta) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \sin \theta > 0$

de sorte qu'on peut conclure que l'angle vaut $+\frac{\pi}{3}$ puisque $\theta = \pm \frac{\pi}{3}$ et $\sin \theta > 0$ Pas besoin de faire d'autres calculs inutiles!

EXEMPLE N° 2 On note $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Déterminer la matrice dans la base $\mathcal{B}$ de la réflexion par rapport au plan F d'équation : $x - 2y - z = 0$

L'idée à retenir est qu'on connaît bien les matrices des isométries de $\mathbb{R}^3$ dans des bases $\mathcal{B}' = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ qui sont adaptées à ces isométries. Aussi, on commence par déterminer une telle base $\mathcal{B}'$ puis on réalisera un changement de bases orthonormée

On détermine la matrice dans une base orthonormée $\mathcal{B}'$ adaptée puis on réalise un changement de bases orthonormées entre la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ et la base $\mathcal{B}'$.

Puisqu'on connaît le plan F par son équation, on sait déterminer un vecteur normal à ce plan qui dirige donc la

droite $F^\perp$. Ici : $(1, -2, -1)$ dirige la droite $F^\perp$ et on remarque que $(1, 0, 1) \in F$ puisque $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

On pose : $u = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, -1)$, $v = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)$ et $w = u \wedge v = \frac{1}{\sqrt{6}\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

alors $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ est une BON adaptée à $F^\perp \oplus F = \mathbb{R}^3$ et donc adaptée à la réflexion f .

On sait que : $A' = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ puisque $\vec{u} \in F^\perp = \text{Ker}(f + id)$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont dans $F = \text{Ker}(f - id)$

Et : $P = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in O_3(\mathbb{R})$ donc $P^{-1} = P^T$ puisque c'est une matrice de passage d'une BON à une BON.

En notant $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, la formule de changement de bases donne : $P^{-1}AP = A' \Leftrightarrow P^TAP = A' \Leftrightarrow A = PA'P^T$

$$A = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & -\sqrt{2} \\ -2 & 0 & -\sqrt{2} \\ -1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ \sqrt{3} & 0 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & -\sqrt{2} \\ -2 & 0 & -\sqrt{2} \\ -1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ \sqrt{3} & 0 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

de sorte que finalement : $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

2. Déterminer la matrice dans la base $\mathcal{B}$ de la rotation d'axe orienté par $\vec{i} - \vec{j}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$

Le principe est le même qu'avant : on commence par déterminer la matrice A' dans une base adaptée à la rotation puis on réalise un changement de bases

Le vecteur $u = \frac{\sqrt{2}}{2}(1, -1, 0)$ dirige l'axe D de la rotation. Le vecteur $v = (0, 0, 1)$ est orthogonale à u (car $u \cdot v = 0$)

donc il est dans $D^\perp$. Le vecteur $w = u \wedge v = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1, -1, 0)$ permet ainsi d'obtenir une base $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ orthonormée adaptée à $D \oplus D^\perp = \mathbb{R}^3$ où $D = \text{Vect}(u)$ est l'axe de la rotation. La matrice de la rotation dans $\mathcal{B}'$ est :

$$A' = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(r) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \frac{\pi}{2} & -\sin \frac{\pi}{2} \\ 0 & \sin \frac{\pi}{2} & \cos \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice de passage de $\mathcal{B}$ (base canonique de $\mathbb{R}^3$) à $\mathcal{B}'$ vérifie $P = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} \in O_3(\mathbb{R})$ d'où $P^{-1} = P^T$.

En notant $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, on a, par changement de bases : $P^{-1}AP = A' \Leftrightarrow P^TAP = A' \Leftrightarrow A = PA'P^T$

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -\sqrt{2} \\ -1 & 1 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$