

## EXERCICE N° 1

Déterminer le rayon de convergence des séries entières

- 1)  $\sum \frac{(3n)!}{(n!)^3} z^{3n}$  2)  $\sum n^{\ln n} z^n$  3)  $\sum \frac{\text{ch}(5n)}{\text{sh}^2 n} z^{2n+1}$  4)  $\sum \text{Arccos} \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right) z^n$   
 5)  $\sum a_n x^n$  où  $a_n = \begin{cases} 2^n & \text{si } n \text{ est pair} \\ 3^n & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$  6)  $\sum a_n z^n$  où  $a_n$  est la nième décimale de  $\pi$

1. On pose  $u_n = \frac{(3n)!}{(n!)^3} z^{3n}$  et on utilise la règle de d'Alembert. Pour  $z \neq 0$  :

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{(3n+3)!}{((n+1)!)^3} \times \frac{(n!)^3}{(3n)!} \times \frac{|z|^{3n+3}}{|z|^{3n}} = \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{(n+1)^3} |z|^3 \sim \frac{27n^3}{n^3} |z|^3 \sim 27|z|^3$$

Si  $|z| < \frac{1}{3} \Leftrightarrow 27|z|^3 < 1$ , la série CVA donc  $R \geq \frac{1}{3}$  Si  $|z| > \frac{1}{3} \Leftrightarrow 27|z|^3 > 1$ , la série DVG donc  $R \leq \frac{1}{3}$  Ainsi :  $R = \frac{1}{3}$

2. On pose  $u_n = n^{\ln n} z^n$  et on utilise la règle de d'Alembert. Pour  $z \neq 0$  :

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{(n+1)^{\ln(n+1)}}{n^{\ln n}} \times |z| = \exp \left( (\ln(n+1))^2 - (\ln n)^2 \right) |z|$$

$$\text{or : } (\ln(n+1))^2 - (\ln n)^2 = (\ln n + \ln(1 + \frac{1}{n}))^2 - (\ln n)^2 = 2(\ln n) \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) + \left( \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \right)^2 \sim \frac{2 \ln n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\sim \frac{2 \ln n}{n} \quad \sim \frac{1}{n^2} = o \left( \frac{2 \ln n}{n} \right)$$

Par suite :  $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} |z|$  d'où CVA si  $|z| < 1$  (donc  $R \geq 1$ ) et DVG si  $|z| > 1$  (donc  $R \leq 1$ ). Aussi  $R = 1$

3. Notons  $a_n = \frac{\text{ch}(5n)}{\text{sh}^2 n} \sim \frac{e^{5n}}{\left(\frac{e^n}{2}\right)^2} \sim 2e^{3n}$  donc  $\sum a_n z^{2n+1}$  et  $\sum 2e^{3n} z^{2n+1}$  ont le même rayon de convergence.

On pose  $u_n = 2e^{3n} z^{2n+1}$  et on utilise la règle de d'Alembert. Pour  $z \neq 0$  :  $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{2e^{3n+3}}{2e^{3n}} \times \frac{|z|^{2n+3}}{|z|^{2n+1}} = e^3 |z|^2$

Si  $|z| < e^{-\frac{3}{2}}$  alors CVA d'où  $R \geq e^{-\frac{3}{2}}$ . Si  $|z| > e^{-\frac{3}{2}}$  alors DVG d'où  $R \leq e^{-\frac{3}{2}}$ . Aussi :  $R = e^{-\frac{3}{2}}$

4. Notons  $a_n = \text{Arccos} \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \text{Arccos} 1 = 0$  et donc  $\cos a_n = 1 - \frac{1}{n^2} \Leftrightarrow -\frac{1}{n^2} = \cos(a_n) - 1 \sim -\frac{a_n^2}{2}$

Aussi :  $a_n^2 \sim \frac{2}{n^2} \Rightarrow a_n \sim \frac{\sqrt{2}}{n}$  et  $\sum a_n z^n$  et  $\sum \frac{\sqrt{2}}{n} z^n$  ont le même rayon de convergence qui est le même que celui de la série  $\sum n \frac{\sqrt{2}}{n} z^n = \sqrt{2} \sum z^n$  soit  $R = 1$  car on reconnaît la série géométrique

5. Étudions les séries  $\sum a_{2n} x^{2n}$  et  $\sum a_{2n+1} x^{2n+1}$

$$\sum a_{2n} x^{2n} = \sum 2^{2n} x^{2n} = \sum (4x^2)^n \text{ CV si } 4x^2 < 1 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \text{DVG si } 4x^2 > 1 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$$

$$\sum a_{2n+1} x^{2n+1} = \sum 3^{2n+1} x^{2n+1} = (3x) \sum (9x^2)^n \text{ CV si } 9x^2 < 1 \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad \text{DVG si } 9x^2 > 1 \Leftrightarrow |x| > \frac{1}{3}$$

Si  $|x| < \frac{1}{3}$ ,  $\sum a_{2n} x^{2n}$  et  $\sum a_{2n+1} x^{2n+1}$  convergent toutes les deux donc  $\sum a_n x^n$  converge aussi et alors  $R \geq \frac{1}{3}$

En effet, la somme partielle  $S_N$  de  $\sum a_n x^n$  est la somme d'une somme partielle de  $\sum a_{2n} x^{2n}$  et d'une somme partielle de  $\sum a_{2n+1} x^{2n+1}$  qui admettent toutes les deux une limite donc la suite  $(S_N)$  admet bien une limite.

Si  $\frac{1}{3} < |x| < \frac{1}{2}$ ,  $\sum a_{2n+1} x^{2n+1}$  diverge grossièrement donc  $(a_n x^n)$  ne peut pas tendre vers 0 (puisque'il y a une suite

extraite qui ne tend pas vers 0) et donc  $\sum a_n x^n$  diverge grossièrement entraînant  $R \leq \frac{1}{3}$ . Ainsi :  $R = \frac{1}{3}$

6. On a :  $a_n \in [0, 9]$  donc :  $|a_n z^n| \leq 9|z|^n$  or  $\sum 9z^n$  a pour rayon de convergence 1 aussi, par comparaison :  $R \geq 1$

De plus, pour  $z = 1$ , la série  $\sum a_n$  diverge grossièrement car sinon la suite d'entiers  $(a_n)$ , si elle tend vers 0, elle est forcément stationnaire à 0 ce qui conduirait à  $\pi \in \mathbb{Q}$  (développement décimale avec un nombre finie de décimale)! Ainsi :  $R \geq 1$  mais puisqu'on avait déjà l'autre inégalité, on a  $R = 1$