

1. Donner un équivalent en 0 et en $+\infty$ de $f(x) = \ln(1+x) + xe^x - 2\operatorname{Arctan} x$

2. Déterminer les limites suivantes

$$a) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1-e^x)(1-\cos(x^2))}{x^k} \text{ où } k \in \{4, 5, 6\} \quad b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arcsin x}{x^2 \arcsin x} \quad c) \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(e - \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x \right)$$

3. On considère la fonction vectorielle $f(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ où $x(t) = \operatorname{Arccos} \frac{1}{t}$ et $y(t) = \operatorname{th}(t) = \frac{\operatorname{sh}(t)}{\operatorname{ch}(t)}$

(a) Préciser le domaine D_c de continuité de f .

(b) Préciser le domaine de dérivabilité D de f obtenu par les théorèmes usuels.

(c) Calculer $f'(t)$ pour $t \in D$

(d) f est-elle dérivable aux points de D_c qui ne sont pas dans D ?

puis EXEMPLE 1 (avec sa suite) puis EXEMPLE 2

1. Donner un équivalent en 0 et en $+\infty$ de $f(x) = \ln(1+x) + xe^x - 2\operatorname{Arctan} x$

2. Déterminer les limites suivantes

$$a) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1-e^x)(1-\cos(x^2))}{x^k} \text{ où } k \in \{4, 5, 6\} \quad b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arcsin x}{x^2 \arcsin x} \quad c) \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(e - \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x \right)$$

3. On considère la fonction vectorielle $f(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ où $x(t) = \operatorname{Arccos} \frac{1}{t}$ et $y(t) = \operatorname{th}(t) = \frac{\operatorname{sh}(t)}{\operatorname{ch}(t)}$

(a) Préciser le domaine D_c de continuité de f .

(b) Préciser le domaine de dérivabilité D de f obtenu par les théorèmes usuels.

(c) Calculer $f'(t)$ pour $t \in D$

(d) f est-elle dérivable aux points de D_c qui ne sont pas dans D ?

puis EXEMPLE 1 (avec sa suite) puis EXEMPLE 2

1. Donner un équivalent en 0 et en $+\infty$ de $f(x) = \ln(1+x) + xe^x - 2\operatorname{Arctan} x$

2. Déterminer les limites suivantes

$$a) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1-e^x)(1-\cos(x^2))}{x^k} \text{ où } k \in \{4, 5, 6\} \quad b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arcsin x}{x^2 \arcsin x} \quad c) \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(e - \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x \right)$$

3. On considère la fonction vectorielle $f(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ où $x(t) = \operatorname{Arccos} \frac{1}{t}$ et $y(t) = \operatorname{th}(t) = \frac{\operatorname{sh}(t)}{\operatorname{ch}(t)}$

(a) Préciser le domaine D_c de continuité de f .

(b) Préciser le domaine de dérivabilité D de f obtenu par les théorèmes usuels.

(c) Calculer $f'(t)$ pour $t \in D$

(d) f est-elle dérivable aux points de D_c qui ne sont pas dans D ?

puis EXEMPLE 1 (avec sa suite) puis EXEMPLE 2

1. Donner un équivalent en 0 et en $+\infty$ de $f(x) = \ln(1+x) + xe^x - 2\text{Arctan } x$

En 0 Tous les termes ont un équivalent de poids comparable d'ordre 1 donc on passe n DL à l'ordre 2

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad xe^x = x(1+x+o(x)) = x + x^2 + o(x^2) \quad \text{Arctan } x = x + o(x^2)$$

Pas de termes d'ordre 2 par imparité

$$\text{Alors : } f(x) = \frac{x^2}{2} + o(x^2) \Rightarrow \boxed{f(x) \sim_0 \frac{x^2}{2}}$$

$$\text{En } +\infty \quad \frac{\text{Arctan } x}{xe^x} \sim_{+\infty} \frac{\pi}{2xe^x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \Rightarrow \text{Arctan } x = o_{+\infty}(xe^x) \quad \text{et} \quad \ln(1+x) = \ln x + \underbrace{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}_{=o_{+\infty}(\ln x)} \sim_{+\infty} \ln x$$

$$\frac{\ln(1+x)}{xe^x} \sim_{+\infty} \frac{\ln x}{xe^x} = \frac{\ln x}{x} \times \frac{1}{e^x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \times 0 = 0 \quad \text{par croissance comparée aussi} \quad \ln(1+x) = o_{+\infty}(xe^x)$$

$$\text{Finalement : } f(x) = xe^x + o_{+\infty}(xe^x) \Rightarrow \boxed{f(x) \sim_{+\infty} xe^x}$$

2. Déterminer les limites suivantes

$$a) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1-e^x)(1-\cos(x^2))}{x^k} \text{ où } k \in \{4, 5, 6\} \quad b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arcsin x}{x^2 \arcsin x} \quad c) \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(e - \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x \right)$$

$$a) \quad 1 - e^x \sim_0 -x \quad \text{et} \quad \begin{cases} 1 - \cos(u) \sim_0 -\frac{u^2}{2} \\ u = x^2 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \end{cases} \Rightarrow 1 - \cos(x^2) \sim_0 -\frac{x^4}{2} \text{ alors :}$$

$$\frac{(1-e^x)(1-\cos(x^2))}{x^5} \sim_0 \frac{-x \times \frac{x^4}{2}}{x^k} \sim_0 -\frac{x^{5-k}}{2} \quad \text{d'où} \quad \boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1-e^x)(1-\cos(x^2))}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{x}{2} \right) = 0^-}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1-e^x)(1-\cos(x^2))}{x^5} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1-e^x)(1-\cos(x^2))}{x^6} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{2x} \right) = -\infty}$$

$$b) \text{ On sait que : } x^2 \arcsin x \sim_0 x^2 \times x \sim_0 x^3$$

Pour le numérateur, les termes de la somme ont le même poids. On doit donc utiliser le terme suivant dans le DL de arcsin. Par imparité, il est d'ordre 3. On obtiendra le DL3 de arcsin en intégrant le DL2 de sa

$$\text{dérivée : } \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{or} \quad (1+u)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}u + o(u) \text{ avec } u = -x^2 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \quad \text{donc}$$

$$\arcsin'(x) = 1 - \frac{1}{2} \times (-x^2) + o(x^2) \quad \text{et, en intégrant : } \arcsin x = \underbrace{\arcsin 0}_{=0} + x + \frac{1}{2} \times \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$\text{Ainsi : } x - \arcsin x = -\frac{x^3}{6} + o(x^3) \sim_0 -\frac{x^3}{6} \quad \text{puis} \quad \frac{x - \arcsin x}{x^2 \arcsin x} \sim_0 -\frac{1}{6} \quad \text{et} \quad \boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arcsin x}{x^2 \arcsin x} = -\frac{1}{6}}$$

c) On commence par ramener le problème en 0 à l'aide d'un changement de variables.

$$\text{On pose } h = \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0^+ \text{ et : } f(x) = x \left(e - \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x \right) = \frac{1}{h} \left(e - (1+h)^{\frac{1}{h}} \right)$$

Remarque : Lorsque la limite n'est pas en $a \in \mathbb{R}^$, on commence par ramener le problème en 0 en posant $x = a + h$*

Pour une expression où la base et l'exposant bouge en même temps, on repasse en écriture exponentielle.

$$(1+h)^{\frac{1}{h}} = e^{\frac{1}{h} \times \ln(1+h)} = e^{\frac{1}{h} \times \left(h - \frac{h^2}{2} + o(h^2) \right)} = e^{1 - \frac{h}{2} + o(h)} \quad \text{et alors} \quad e - (1+h)^{\frac{1}{h}} = e - e \times e^{-\frac{h}{2} + o(h)}$$

$$\text{Or : } e^u = 1 + u + o(u) \text{ avec } u = -\frac{h}{2} + o(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \quad \text{donc} \quad e^{-\frac{h}{2} + o(h)} = 1 - \frac{h}{2} + o(h)$$

$$\text{Le } o(u) = \underbrace{u \varepsilon(u)}_{\rightarrow 0} = h \times \underbrace{\left(-\frac{1}{2} + o(1) \right) \varepsilon(u)}_{\rightarrow 0} \text{ est dans le } o(h)$$

$$\text{Ainsi : } e - (1+h)^{\frac{1}{h}} = e - e \times \left(1 - \frac{h}{2} + o(h) \right) = \frac{eh}{2} + o(h)$$

$$\text{puis} \quad f(x) = f\left(\frac{1}{h}\right) = \frac{e}{2} + o(1) \xrightarrow{h \rightarrow 0} \boxed{\frac{e}{2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(e - \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x \right)}$$

3. On considère la fonction vectorielle $f(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ où $x(t) = \operatorname{Arccos} \frac{1}{t}$ et $y(t) = \operatorname{th}(t) = \frac{\operatorname{sh}(t)}{\operatorname{ch}(t)}$

(a) Préciser le domaine D_c de continuité de f .

$\begin{cases} [t \mapsto \frac{1}{t}] \text{ est } C^0 \text{ sur } \mathbb{R}^* \text{ donc aussi sur } D_c =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[\\ \operatorname{Arccos} \text{ est } C^0 \text{ sur } [-1, 1] \\ \frac{1}{t} \in [-1, 1] \Leftrightarrow t \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[\end{cases} \Rightarrow \text{la composée } x \text{ est } C^0 \text{ sur } D_c$
 sh et ch sont continues sur $\mathbb{R}$ et ch ne s'y annule pas donc, par quotient, y est continue sur $\mathbb{R}$
 Ainsi, f est continue sur $D_c \cap \mathbb{R} =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[= D_c$

(b) Préciser le domaine de dérivabilité D de f obtenu par les théorèmes usuels.

$\begin{cases} [t \mapsto \frac{1}{t}] \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}^* \text{ donc sur } D =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[\\ \operatorname{Arccos} \text{ est dérivable sur }]-1, 1[\\ \frac{1}{t} \in]-1, 1[\Leftrightarrow t \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[\end{cases} \Rightarrow \text{la composée } x \text{ est dérivable sur } D$
 sh et ch sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et ch ne s'y annule pas donc, par quotient, y est dérivable sur $\mathbb{R}$
 Ainsi, f est dérivable sur $D \cap \mathbb{R} =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[= D$

(c) Calculer $f'(t)$ pour $t \in D$

Pour $t \in D$: $f'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$ où $x(t) = \operatorname{Arccos}(u(t))$ avec $u(t) = \frac{1}{t}$ aussi

$$x'(t) = u'(t) \times \operatorname{Arccos}'(u(t)) = -\frac{1}{t^2} \times \frac{-1}{\sqrt{1 - \frac{1}{t^2}}} = \frac{1}{t^2} \times \frac{\sqrt{t^2}}{\sqrt{t^2 - 1}} = \frac{|t|}{t^2 \sqrt{t^2 - 1}} = x'(t)$$

$$y'(t) = \frac{\operatorname{sh}'(t) \operatorname{ch}(t) - \operatorname{sh}(t) \operatorname{ch}'(t)}{\operatorname{ch}^2(t)} = \frac{\operatorname{ch}^2(t) - \operatorname{sh}^2(t)}{\operatorname{ch}^2(t)} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2(t)} = y'(t)$$

(d) f est-elle dérivable aux points de D_c qui ne sont pas dans D ?

Il s'agit d'étudier la dérivabilité en ± 1 or :

$x'(t) = \frac{|t|}{t^2 \sqrt{(t-1)(t+1)}} \sim \frac{1}{1\sqrt{2}\sqrt{t-1}} \xrightarrow{t \rightarrow 1^+} +\infty$ aussi x n'est pas dérivable en 1 et donc f non plus.

$x'(t) = \frac{|t|}{t^2 \sqrt{(t-1)(t+1)}} \sim -\frac{1}{1\sqrt{-2(t+1)}} \xrightarrow{t \rightarrow -1^-} +\infty$ aussi x n'est pas dérivable en -1 et donc f non plus.

EXEMPLE N° 1 Démontrer que :

1. le carré $C = [-2, 0] \times [0, 2]$ est une partie bornée qui n'est pas ouverte

Si $M > 2\sqrt{2}$ alors $C \subset B((0, 0), M)$ donc C est bornée. C n'est pas ouverte car $a = (-2, 2) \in C$ et, pour tout $\varepsilon > 0$, $B(a, \varepsilon)$ n'est pas incluse dans C puisque $a_\varepsilon = a + \frac{\varepsilon}{2}(-1, 1) \in B(a, \varepsilon) \cap (\mathbb{R}^2 - C)$

2. le demi-plan $P_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ est une partie ouverte qui n'est pas bornée.

Si $a = (x_0, y_0) \in P_+$ alors $B(a, \frac{y_0}{2}) \subset P_+$ donc P_+ est ouverte. Pour tout $M > 0$, si $y > M$ alors $(0, y) \in P_+$ et $(0, y) \notin B((0, 0), M)$ donc P_+ n'est pas inclus dans $B((0, 0), M)$. Par suite, P_+ n'est pas bornée

3. $\mathbb{R}^2$ est une partie ouverte et fermée (ce qui est plus étonnant!)

$\mathbb{R}^2$ est clairement une partie ouverte et son complémentaire est $\emptyset$ qui est ouverte par vacuité

4. Pour C et P_+ , préciser les points à l'intérieur, les points adhérents et les points à l'extérieur.

Un "bon" schéma suffira pour justifier les réponses

les points à l'intérieur de C sont dans $\overset{\circ}{C} =]-2, 0[\times]0, 2[$

les points adhérents de C sont tous les points de C

les points à l'extérieur de C sont dans $\mathbb{R}^2 - C$ (qui est une partie ouverte)

Puisque $\mathbb{R}^2 - C$ est une partie ouverte, C est une partie fermée de $\mathbb{R}^2$

les points à l'intérieur de P_+ sont tous les points de P_+ puisque P_+ est une partie ouverte.

les points adhérents de P_+ sont ceux de $\overline{P_+} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}$,

les points à l'extérieur de P_+ sont ceux de $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < 0\}$

EXEMPLE N° 2 Si $\left[\vec{f} : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \right]$ et $\left[\vec{g} : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \right]$ sont de classe C^1 prouver que

1. si $\vec{f}$ ne s'annule pas sur I alors $u = \|\vec{f}\|$ est de classe C^1 sur I et calculer u' à l'aide de f et f'

On note $\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ alors x et y sont C^1 sur I et $u(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$

$\begin{cases} [t \mapsto x^2(t) + y^2(t)] \text{ est } C^1 \text{ sur } I \text{ par somme et produit} \\ [s \mapsto \sqrt{s}] \text{ est } C^1 \text{ sur }]0, +\infty[\\ \forall t \in I, x^2(t) + y^2(t) > 0 \text{ car } \vec{f} \text{ ne s'annule pas} \end{cases} \Rightarrow u \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } I$

De plus : $u'(t) = \frac{2x'(t)x(t) + 2y'(t)y(t)}{2\sqrt{x^2(t) + y^2(t)}} = \frac{\vec{f}'(t) \cdot \vec{f}(t)}{\|\vec{f}(t)\|}$

2. $v = \det(\vec{f}, \vec{g})$ est de classe C^1 sur I et calculer v' à l'aide de f, f', g et g'

On note de plus $\vec{g}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix}$ alors x et y sont C^1 sur I et $v(t) = x(t)y_1(t) - y(t)x_1(t)$ donc, par les théorèmes

usuels, v est de classe C^1 sur I et :

$$v'(t) = x'(t)y_1'(t) + x(t)y_1''(t) - y'(t)x_1'(t) - y(t)x_1''(t) = \det(\vec{f}'(t), \vec{g}(t)) + \det(\vec{f}(t), \vec{g}'(t))$$

Formule de Leibniz

Si f et g sont des fonctions réelles de classe C^n sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$ (où $n \in \mathbb{N}^*$)

alors la fonction fg est aussi de classe C^n sur I et : $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$

On fait une démonstration par récurrence sur n avec l'hypothèse

HR _{n} : Si f et g sont de classe C^n sur I alors fg est de classe C^n sur I et : $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$

Initialisation :

Si f et g de classe C^1 sur I , fg est dérivable sur I et $(fg)' = fg' + f'g = \binom{1}{0} f^{(0)} g^{(1-0)} + \binom{1}{1} f^{(1)} g^{(1-1)}$

Comme f est de classe C^1 , on sait que f' est C^0 . De même pour g' donc $(fg)' = f'g + fg'$ est de classe C^0 sur I par produit et somme de fonctions C^0 sur I . L'hypothèse HR₁ est vérifiée.

Hérédité On suppose HR _{n} vérifiée et on prouve HR _{$n+1$} c'est à dire que

« Si f et g sont de classe C^{n+1} sur I alors fg est de classe C^{n+1} et : $(fg)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}$ »

Aussi, on se donne f et g de classe C^{n+1} sur I . Étant de classe C^{n+1} sur I , f et g sont aussi de classe C^n sur I

L'hypothèse HR _{n} s'applique : fg est de classe C^n sur I et $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$

Pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $n-k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ autrement dit $k \leq n$ et $n-k \leq n$ donc $f^{(k)}$ et $g^{(n-k)}$ sont au moins de classe C^1 sur I puisque f et g sont de classe C^{n+1} sur I par hypothèse. Par produit (résultat prouvé pour $n=1$ dans l'initialisation) et combinaison linéaire de fonctions C^1 sur I , on peut donc affirmer que $(fg)^{(n)}$ est de classe C^1 sur I autrement dit

fg est bien C^{n+1} sur I et, par définition : $(fg)^{(n+1)} = ((fg)^{(n)})' = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (f^{(k)} g^{(n-k)})'$ par linéarité de la dérivation

Aussi : $(fg)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (f^{(k+1)} g^{(n-k)} + f^{(k)} g^{(n-k+1)})$ en utilisant la dérivée d'un produit $(uv)' = u'v + uv'$ avec

$u = f^{(k)}$, $v = g^{(n-k)}$ et sachant $(f^{(k)})' = f^{(k+1)}$ et $(g^{(n-k)})' = g^{(n-k+1)}$

On décompose en deux sommes : $(fg)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k+1)} g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k+1)}$

On réalise alors un changement d'indice en posant $p = k+1$ dans la première somme et $k = p$ dans la seconde :

$$\begin{aligned} (fg)^{(n+1)} &= \sum_{p=1}^{n+1} \binom{n}{p-1} f^{(p)} g^{(n-(p-1))} + \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} f^{(p)} g^{(n+1-p)} \quad \text{alors en isolant } \begin{cases} \text{le terme } p = n+1 \text{ de la 1er somme} \\ \text{le terme } p = 0 \text{ de la 2nd somme} \end{cases} \\ &= \underbrace{\binom{n}{n}}_{=1} f^{(n+1)} g^{(0)} + \sum_{k=1}^n \left(\binom{n}{p-1} + \binom{n}{p} \right) f^{(p)} g^{(n+1-p)} + \underbrace{\binom{n}{0}}_{=1} f^{(0)} g^{(n+1)} \quad \begin{cases} \text{en regroupant les sommes et} \\ \text{en utilisant le triangle de Pascal} \end{cases} \\ &= \binom{n+1}{n+1} f^{(n+1)} g^{(0)} + \sum_{p=1}^n \binom{n+1}{p} f^{(p)} g^{(n+1-p)} + \binom{n+1}{0} f^{(0)} g^{(n+1)} \\ &= \sum_{p=0}^{n+1} \binom{n+1}{p} f^{(p)} g^{(n+1-p)} \quad \text{en remarquant que } \begin{cases} \text{le 1er terme est le terme de la somme pour } p = n+1 \\ \text{le dernier terme est le terme de la somme pour } p = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Finalement, HR _{$n+1$} est bien vérifiée.

Conclusion : Par principe de récurrence simple sur n , on sait que HR _{n} est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$