

EXEMPLE N° 1 Dans chaque cas, prouver que F est un espace vectoriel dont on précisera la dimension.

a) $F = \{(s, t + s, 2t - s) \mid (t, s) \in \mathbb{R}^2\}$

Dans $\mathbb{R}^3$: $F = \{s(1, 1, -1) + 2(0, 1, 2) \mid (t, s) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}(\underbrace{(1, 1, -1)}_{=u}, \underbrace{(0, 1, 2)}_{=v})$

Les vecteurs u et v étant non colinéaires, ils sont linéairement indépendants.

Ainsi, (u, v) est une base de F et $\dim F = 2$

b) $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{K}^4 \mid 2x - y + 2z - t = x + y + z = 0\}$

Dans $\mathbb{K}^4$: $(x, y, z, t) \in F \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + 2z - t = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y - 2x - 2y - t = 0 \\ z = -x - y \end{cases}$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} t = -3y \\ z = -x - y \end{cases}$
 $\Leftrightarrow (x, y, z, t) = (x, y, -x - y, -3y) = x \underbrace{(1, 0, -1, 0)}_{=u} + y \underbrace{(0, 1, -1, -3)}_{=v}$
 $\Leftrightarrow (x, y, z, t) \in \text{Vect}(u, v)$

Ainsi : $F = \text{Vect}(u, v)$ or u et v sont non colinéaires donc (u, v) est libre

Finalement, (u, v) est une base de F et $\dim F = 2$

c) $F = \{(\alpha + \gamma)X^2 + (\alpha + \beta)X + \beta - \gamma \mid (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3\}$

On travaille dans le $\mathbb{C}$ vectoriel ambiant $\mathbb{C}[X]$. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$:

$P \in F \Leftrightarrow \exists (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3, P = (\alpha + \gamma)X^2 + (\alpha + \beta)X + \beta - \gamma = \alpha(X + X^2) + \beta(1 + X) + \gamma(-1 + X^2)$

$\Leftrightarrow P \in \text{Vect}(X + X^2, 1 + X, -1 + X^2)$

Aussi : $F = \text{Vect}(X + X^2, 1 + X, -1 + X^2)$ et F est un espace vectoriel puisque c'est un sous-espace vectoriel (engendré) de $\mathbb{C}[X]$

Mais, la famille $(X + X^2, 1 + X, -1 + X^2)$ est liée : $(X + X^2) - (1 + X) = -1 + X^2$ donc : $F = \text{Vect}(X + X^2, 1 + X)$

La famille $(X + X^2, 1 + X)$ est libre (degrés distincts) et génératrice de F donc c'est une base de F et : $\dim F = 2$.

e) F contient les polynômes réels de degrés au plus 3 vérifiant $P(1) = P(-1)$ et $P(0) = P^{(2)}(0) = 0$

On travaille dans l'espace vectoriel ambiant $\mathbb{R}[X]$. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$

$P \in F \Leftrightarrow \deg P \leq 3$ et $\begin{cases} P(1) = P(-1) \\ P(0) = 0 \\ P^{(2)}(0) = 0 \end{cases}$
 $\Leftrightarrow \exists (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4, P = aX^3 + bX^2 + cX + d$ et $\begin{cases} a + b + c + d = -a + b - c + d \quad (1) \\ d = 0 \\ 2b = 0 \quad (\text{avec } P' = 3aX^2 + 2bX + c, P^{(2)} = 6aX + 2b) \end{cases}$

Or : $(1) \Leftrightarrow 2a = -2c \Leftrightarrow c = -a$ de sorte que :

$P \in F \Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R}, P = aX^3 - aX = a(X^3 - X)$ et donc : $F = \text{Vect}(X^3 - X)$

Ainsi, F est un espace vectoriel car c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ et c'est même une droite vectorielle engendrée par l'unique vecteur $X^3 - X$ qui est non nul soit $\dim F = 1$

f) F est l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' + 4y = 0$

On travaille dans l'espace ambiant $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

On reconnaît une EDL2 dont l'équation caractéristique est $r^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow r = \pm 2i$

Il y a deux racines complexes conjuguées $\alpha \pm i\omega$ où $\alpha = 0$ et $\omega = 2$. On sait que les solutions ont pour expression : $y(x) = e^{\alpha x} (A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x)) = \underbrace{A \cos(2x)}_{f(x)} + \underbrace{B \sin(2x)}_{g(x)}$ où $(A, B) \in \mathbb{R}^2$

Ainsi : $F = \text{Vect}(f, g)$ où (f, g) est libre puisque f et g sont non colinéaires (parité) aussi $\dim F = 2$

g) F est l'ensemble des suites réelles vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$

Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, les vecteurs $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de F vérifient une relation de récurrence linéaire double.

L'équation caractéristique est $r^2 = 4r - 4 \Leftrightarrow (r - 2)^2 = 0$ qui possède une racine double $r = 2$. Ainsi :

$u \in F \Leftrightarrow \exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = (\alpha n + \beta)2^n = \alpha n 2^n + \beta 2^n \Leftrightarrow \exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, u = \alpha a + \beta b$ où $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_n = n 2^n \\ b_n = 2^n \end{cases}$

et donc : $F = \text{Vect}(a, b)$ est un espace vectoriel car c'est un sous-espace vectoriel engendré de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

La famille (a, b) est génératrice et c'est une famille libre (car a et b sont non colinéaires puisqu'il n'y a pas proportionnalité des premiers termes $(a_0, a_1) = (0, 2)$ et $(b_0, b_1) = (2, 4)$) donc c'est une base de F et $\dim F = 2$

EXEMPLE N° 2 Dans $\mathbb{R}[X]$, on définit $e_1 = (1-X)^3$, $e_2 = (1-X)^2$, $e_3 = 1-X$ et $e_4 = 1$

1. Prouver que $\mathcal{B}' = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ est une famille libre de $\mathbb{R}[X]$. Quel espace connu E engendre-t-elle?

La famille $\mathcal{B}'$ est une famille de polynôme à degrés échelonnés donc c'est une famille libre de $\mathbb{R}[X]$.
De plus, les 4 polynômes sont dans $\mathbb{R}_3[X]$ qui est de dimension 4 et on sait qu'elle est libre donc c'est une base de $\mathbb{R}_3[X]$ et ainsi $\text{Vect}(\mathcal{B}') = \mathbb{R}_3[X] = E$

2. On note $\mathcal{B}$ la base canonique de E. Donner les matrices de passage entre les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.

Par définition, on a : $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et on trouve aussi $P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
car on a : $1 = e_4$, $X = 1 - (1-X) = e_4 - e_3$, $X^2 = (1-X)^2 + 2X - 1 = e_2 + 2(e_4 - e_3) - e_4 = e_2 - 2e_3 + e_4$
et $X^3 = -(1-X)^3 + 3X^2 - 3X + 1 = -e_1 + 3(e_2 - 2e_3 + e_4) - 3(e_4 - e_3) + e_4 = -e_1 + 3e_2 - 3e_3 + e_4$

3. En déduire une primitive de $\left[f : x \mapsto (x^3 + x^2)\sqrt{1-x} \right] \text{ sur }]-\infty, 1[$

$X^3 - X^2$ de coordonnées $(0, 0, -1, 1)$ dans la base canonique est de coordonnées $P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}'$.

Aussi : $f(x) = (x^3 - x^2)(1+x)^{\frac{1}{2}} = (- (1-x)^3 + 2(1-x)^2 - (1-x))\sqrt{1-x} = - (1-x)^{3+\frac{1}{2}} + 2(1-x)^{2+\frac{1}{2}} - (1-x)^{1+\frac{1}{2}}$
et donc une primitive F de f sur $\mathbb{R}$ est : $F(x) = \frac{2}{9}(1-x)^{\frac{9}{2}} - \frac{2}{7}(1-x)^{\frac{7}{2}} + \frac{2}{5}(1-x)^{\frac{5}{2}}$

EXEMPLE N° 3 Soient $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ a+b & b+c & 0 \end{pmatrix} \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$

et G l'ensemble des matrices de $M_{2,3}(\mathbb{R})$ dont la somme des coefficients de chacune des lignes est nulle.

1. Prouver que F et G sont des sev de $E = M_{2,3}(\mathbb{R})$
2. Déterminer une base de F et une base de G
3. Déterminer $\dim(F \cap G)$ et $\dim(F + G)$.
4. En déduire que $F + G = E$, F et G sont-ils supplémentaires dans E?
5. Donner deux supplémentaires de $F \cap G$ dans F.

1. On reconnaît des espaces vectoriels engendrés dans $M_{2,3}(\mathbb{R})$:

$$F = \text{Vect}(A_1, A_2, A_3) \text{ où } A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & -a-b \\ c & d & -c-d \end{pmatrix} \mid (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \right\} = \text{Vect}(B_1, B_2, B_3, B_4)$$

$$\text{où } B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

2. On connaît une famille génératrice de ces sev. Il suffit de vérifier le caractère libre des familles qu'on obtient trivialement en revenant à la définition.

$$3. M \in F \cap G \Leftrightarrow \exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a+b & b+c & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{cases} a+b+c=0 \\ a+2b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=-a \\ b=0 \end{cases}$$

$$\text{Aussi : } F \cap G = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & -a \\ a & -a & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right) = \text{Vect}(A_1 - A_3) \text{ d'où } \dim(F \cap G) = 1$$

On a alors : $\dim(F \cap G) = \dim F + \dim G - \dim(F + G) \Leftrightarrow 1 = 3 + 4 - \dim(F + G) \Leftrightarrow \dim(F + G) = 6$

$$4. \begin{cases} F + G \subset E \\ \dim(F + G) = 6 = \dim E \end{cases} \Rightarrow F + G = E \text{ et } \dim(F \cap G) \neq 0 \Rightarrow F \cap G \neq \{O_{2,3}\} \text{ d'où } F \text{ et } G \text{ non supplémentaires}$$

5. Pour obtenir un supplémentaire, on complète la base de $F \cap G$ en une base de F.

$(A_1 - A_3, A_1, A_2)$ est une famille libre de trois vecteurs de F qui est de dimension trois donc c'est une base de F
et $S_1 = \text{Vect}(A_1, A_2)$ convient.

$(A_1 - A_3, A_2, A_3)$ est une famille libre de trois vecteurs de F qui est de dimension trois donc c'est une base de F
et $S_2 = \text{Vect}(A_2, A_3)$ convient.

EXEMPLE N° 4 Soit E un Kev de dimension finie et f est un endomorphisme de E vérifiant $f^3 = id_E$

1. Prouver que $\text{Im}(f - id_E) \subset \text{Ker}(f^2 + f + id_E)$

$$\forall y \in \text{Im}(f - id_E), \exists x \in E, y = f(x) - x \text{ puis } (f^2 + f + id)(y) = (f^2 + f + id)(f(x) - x) = f^3(x) - f^2(x) + f^2(x) + f^2(x) - f^2(x) - x = f^3(x) - x = x - x = 0_E \text{ car } f^3 = id_E$$

$$\text{Ainsi : } \forall y \in \text{Im}(f - id_E), y \in \text{Ker}(f^2 + f + id_E) \text{ soit } \text{Im}(f - id_E) \subset \text{Ker}(f^2 + f + id_E)$$

2. Montrer que le noyau et l'image de $f - id_E$ sont supplémentaires dans E

Par le théorème du rang appliqué à $f - id_E$, on sait déjà que $\dim \text{Im}(f - id_E) + \dim \text{Ker}(f - id_E) = \dim E$
Aussi, pour établir la supplémentarité, il reste à prouver que : $\text{Im}(f - id_E) \cap \text{Ker}(f - id_E) = \{0_E\}$

Soit $x \in \text{Im}(f - id_E) \cap \text{Ker}(f - id_E)$ alors $(f - id_E)(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = x$ mais aussi $(f^2 + f + id_E)(x) = 0_E$ avec 1)

Mais : $f(x) = x \Rightarrow f^2(x) + f(x) + x = f(x) + x + x = x + 2x = 3x$ donc on a obtenu $3x = 0_E \Rightarrow x = 0_E$