

1. Théorème généraux sur les séries entières

- Lemme d'Abel, rayon de convergence et domaine de convergence d'une série entière

Étant donnée une série entière $\sum a_n z^n$,

si la suite $(a_n z_0^n)_{n \geq 0}$ est bornée pour un $z_0 \in \mathbb{C}^*$ (par exemple parce que $a_n z_0^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ ou parce que $\sum a_n z_0^n$ CV)

alors la série $\sum a_n z^n$ CVA pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| < |z_0|$

Le rayon de convergence est $R = \sup \{r \geq 0 \mid (a_n r^n)_{n \geq 0} \text{ est bornée} \} \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$

Le domaine de convergence de la série entière est un disque ouvert de rayon R à l'intérieur duquel il y a CVA, à l'extérieur duquel il y a DVG. Sur le cercle, on ne peut rien conclure.

- Utilisation de la règle de d'Alembert pour les séries entières

Étant donnée deux séries entières $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence R , on sait que

— si z_0 est un complexe avec $\sum a_n z_0^n$ CV alors $R \geq |z_0|$

— si z_0 est un complexe avec $\sum a_n z_0^n$ DV alors $R \leq |z_0|$

On combine ces résultats aux conclusions de la règle de d'Alembert à deux termes consécutifs u_n et u_{n+1} de $\sum a_n z^n$:

si $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$ alors $\begin{cases} \text{si } \ell < 1, \text{ la série CVA et on obtient, en général, une minoration de } R \\ \text{si } \ell > 1, \text{ la série DVG et on obtient, en générale, une majoration de } R \end{cases}$

Attention au série entière lacunaire par exemple :

si $\sum a_n z^n = \sum a_{2n} z^{2n}$, on a $u_n = a_{2n} z^{2n}$ et $u_{n+1} = a_{2n+2} z^{2n+2}$

si $\sum a_n z^n = \sum a_{2n+1} z^{2n+1}$, on a $u_n = a_{2n+1} z^{2n+1}$ et $u_{n+1} = a_{2n+3} z^{2n+3}$

- Propriétés de comparaison des rayons de convergence entre deux séries entières

Étant donnée deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ de rayon de convergence R_a et R_b ,

— si $|a_n| \leq |b_n|$ alors $R_a \geq R_b$

— si $a_n = O(b_n)$ (donc aussi si $a_n = o(b_n)$) alors $R_a \geq R_b$

— si $|a_n| \sim |b_n|$ alors $R_a = R_b$

— $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$, $\sum_{n \geq 0} n a_n z^n$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n} z^n$ ont le même rayon de convergence

— Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\sum n^\alpha z^n$ a un rayon de convergence égale à 1

- Somme de deux séries entières

Étant donnée deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ de rayon de convergence R_a et R_b , alors

$\sum (a_n + b_n) z^n$ est une série entière de rayon de convergence $R \geq \min(R_a, R_b)$ avec égalité si $R_a \neq R_b$

- Produit de Cauchy de deux séries entières

Étant donnée deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ de rayon de convergence R_a et R_b , alors

le produit de Cauchy de ces séries entières est aussi une série entière $\sum c_n z^n$ où $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$

avec un rayon de convergence $R \geq \min(R_a, R_b)$ et, si $|z| < \min(R_a, R_b)$: $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n \right)$

- Fonction somme d'une série entière et résultat de continuité.

Étant donnée une série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ réelle de rayon de convergence R , la fonction somme est l'application

$\left[f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right]$ qui est définie au minimum sur l'intervalle ouvert $] -R, R[$ et au mieux sur l'intervalle fermé $[-R, R]$.

Son domaine de définition est donc l'un des 4 intervalles $] -R, R[$, $[-R, R[$, $] -R, R]$ ou $[-R, R]$.

On sait que la fonction somme est continue sur son domaine de définition.

- Dérivation terme à terme d'une série entière

Étant donnée une série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ réelle de rayon de convergence R ,

- la série entière dérivée terme à terme $\sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1}$ a le même rayon de convergence R et ce rayon est commun à toutes les séries entières dérivée terme à terme suivante

- la somme $\left[f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right]$ est de classe C^∞ sur son intervalle ouvert de convergence $] -R, R[$

- pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)}(x)$ est la somme de la série entière où on a dérivé k fois terme à terme

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1) \dots (n-(k-1)) a_n x^{n-k} \text{ pour } x \in] -R, R[\quad \text{de sorte que} \quad a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$

- Théorème d'intégration termes à termes des séries entières

Étant donnée une série entière $\sum a_n x^n$ réelle de rayon de convergence R et de somme $\left[f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right]$

- la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ dite intégrée terme à terme a le même rayon de convergence R

- on obtient une primitive F de f par : $\forall x \in]-R, R[, F(x) = F(0) + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$

- si $[a, b] \subset]-R, R[: \int_a^b f(t) dt = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_a^b a_n t^n dt \right)$

- Fonction développable en série entière au voisinage de 0 et conditions nécessaires associées.

Une fonction f est développable en série entière sur $] -r, r[$ où $r > 0$ s'il existe une série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ de rayon de

convergence $R \geq r$ telle que : $\forall x \in]-r, r[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

Si f est développable en série entière au voisinage de 0 alors

- f est C^∞ au voisinage de 0

- la série de Taylor $\sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ a un rayon de convergence $R > 0$ (unique développement possible pour f)

Attention! Ces conditions nécessaires ne sont pas suffisantes Contre-ex : $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$

- Unicité du développement en série entière.

Si deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ ont leurs sommes qui coïncident sur un domaine $] -\varepsilon, \varepsilon[$ où $\varepsilon > 0$ alors elles sont égales : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = b_n$

2. Développement en séries entières usuels

Les élèves peuvent utiliser directement, sans démonstration, les DSE suivant toutefois ils doivent pouvoir les démontrer en partant des développements de la série géométrique ou de l'exponentielle.

Famille de la série géométrique

- $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n \quad \left(= 1 + z + z^2 + \dots \right) \quad \text{pour } |z| < 1 \text{ (R = 1)}$

- $\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \quad \left(= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \right) \quad \text{pour } |x| < 1 \text{ (R = 1)}$

Avec $x = -t$ dans $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ et vu que $|-t| < 1 \Leftrightarrow |t| < 1$, on obtient : $\frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^n$ pour $|t| < 1$

En intégrant terme à terme : $\ln(1+t) - \ln(1+0) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{n+1}}{n+1} = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{t^k}{k}$ pour $|t| < 1$ en posant $k = n+1$

- $\text{Arctan}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad \left(= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \right) \quad \text{pour } |x| < 1 \text{ (R = 1)}$

Avec $x = -t^2$ dans $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ et vu que $|-t^2| < 1 \Leftrightarrow t^2 < 1 \Leftrightarrow |t| < 1$, on obtient : $\frac{1}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{2n}$ pour $|t| < 1$

En intégrant terme à terme : $\text{Arctan}(t) - \text{Arctan}(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{2n+1}$ pour $|t| < 1$

Famille de la série exponentielle

- $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \quad \left(= 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} \dots \right) \quad \text{pour } z \in \mathbb{C} \text{ (R = } +\infty \text{)}$

- $\text{ch}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \left(= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} \dots \right) \quad \text{pour } x \in \mathbb{R} \text{ (R = } +\infty \text{)}$

Pour tout x réel : $\text{ch}(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1 + (-1)^n}{2} \frac{x^n}{n!}$ car toutes les séries CVA

Or : $\frac{1 + (-1)^n}{2} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair du type } n = 2k+1 \\ 1 & \text{si } n \text{ est pair du type } n = 2k \end{cases}$ donc : $\text{ch}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ pour tout x réel

- $\text{sh}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \left(= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \dots \right) \quad \text{pour } x \in \mathbb{R} \text{ (R = } +\infty \text{)}$

Pour tout x réel : $\text{sh}(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1 - (-1)^n}{2} \frac{x^n}{n!}$ car toutes les séries CVA

Or : $\frac{1 - (-1)^n}{2} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair du type } n = 2k \\ 1 & \text{si } n \text{ est impair du type } n = 2k+1 \end{cases}$ donc : $\text{sh}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ pour tout x réel

- $\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \left(= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} \dots \right) \quad \text{pour } x \in \mathbb{R} \text{ (R = } +\infty \text{)}$

Pour tout x réel : $\cos(x) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} i^n \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n i^n x^n}{n!} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1 + (-1)^n}{2} \times i^n \frac{x^n}{n!}$ car toutes les séries CVA

$\frac{1 + (-1)^n}{2} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair du type } n = 2k+1 \\ 1 & \text{si } n \text{ est pair du type } n = 2k \end{cases}$ donc : $\cos(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \underbrace{i^{2k}}_{=(i^2)^k=(-1)^k} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ pour x réel

- $\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \left(= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \dots \right) \quad \text{pour } x \in \mathbb{R} \text{ (R = } +\infty \text{)}$

Pour x réel : $\sin(x) = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) = \frac{1}{2i} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} i^n \frac{x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n i^n x^n}{n!} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1 - (-1)^n}{2} \times i^{n-1} \frac{x^n}{n!}$ car les séries CVA

$\frac{1 - (-1)^n}{2} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair du type } n = 2k \\ 1 & \text{si } n \text{ est impair du type } n = 2k+1 \end{cases}$ et : $\sin(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \underbrace{i^{2k}}_{=(i^2)^k=(-1)^k} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ pour x réel

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n \quad \left(= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \dots \right) \quad \text{pour } |x| < 1 \text{ (R=1)}$$

On obtient ce DSE en utilisant que $[f : x \mapsto (1+x)^\alpha]$ est l'unique solution sur $] -1, 1[$ du problème de Cauchy $\begin{cases} y' = \alpha y \\ y(0) = 1 \end{cases}$
 En effet : f est C^1 sur $] -1, +\infty[$ donc sur $] -1, 1[$ et : $f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$ d'où $(1+x)f'(x) = \alpha f(x)$ de plus $f(0) = (1+0)^\alpha = 1^\alpha = 1$

On cherche une solution DSE de $y' = \alpha y$ sous la forme $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ avec un rayon de convergence $R > 0$

Par dérivation terme à terme : $y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$

Sur $] -R, R[$: $(1+x)y'(x) = \alpha y(x) \Leftrightarrow (1+x) \left(\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \right) = \alpha \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right) \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (\alpha a_n) x^n$

On pose $k = n-1$ dans la première somme, $k = n$ dans les deux autres

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) a_{k+1} x^k + \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} (\alpha a_k) x^k$$

On regroupe toutes les sommes qui CVA

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} \left((k+1) a_{k+1} + k a_k \right) x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} (\alpha a_k) x^k$$

Par unicité du développement en série entière

$$\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}, (k+1) a_{k+1} + k a_k = \alpha a_k$$

$$\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}, a_{k+1} = \frac{\alpha - k}{k+1} a_k \text{ car } k+1 \neq 0$$

La suite (a_n) est totalement déterminé puisqu'on connaît $a_0 = y(0) = 1$ puis on calcule $a_1, a_2, \dots$ avec la relation de récurrence. On peut vérifier que le rayon de convergence vérifie $R > 0$ avec la règle de d'Alembert :

si $u_n = a_n x^n \neq 0$ pour $x \neq 0$ alors $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = \frac{|\alpha - n|}{n+1} |x| \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} |x| = |x| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} |x|$

Si $|x| < 1$, il y a CVA donc $R \geq 1$. Si $|x| > 1$, il y a DVG donc $R \leq 1$. Ainsi : $R = 1 > 0$

On peut expliciter le coefficient a_n en itérant la relation de récurrence pour $n \geq 1$:

$$a_n = \frac{\alpha - (n-1)}{n} a_{n-1} = \frac{\alpha - (n-1)}{n} \times \frac{\alpha - (n-2)}{n-1} a_{n-2} = \frac{\alpha - (n-1)}{n} \times \frac{\alpha - (n-2)}{n-1} \times \dots \times \frac{(\alpha - 0)}{1} \underbrace{a_0}_{=1} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$$

en inversant l'ordre des termes du produit au numérateurs et car $n(n-1) \times$

$\dots \times 1 = n!$

Par unicité de la solution d'un produit de Cauchy : $\forall x \in] -1, 1[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \Leftrightarrow (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$

3. Isométrie et matrice orthogonale

- Définition et caractérisations d'une isométrie. Ensemble $O(E)$ et exemples

Dans un espace euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$,

les propositions suivantes équivalentes $((1) \Leftrightarrow (2) \Leftrightarrow (3))$ caractérisent une isométrie :

1) une isométrie est une application linéaire d'un espace euclidien E qui conserve la norme :

$$f \in \mathcal{L}(E) \text{ et } \forall x \in E, \|f(x)\| = \|x\|$$

2) une isométrie est une application de E dans E qui conserve le produit scalaire :

$$f : E \rightarrow E \text{ avec } \forall (x, y) \in E^2, \langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$$

3) une isométrie est une application linéaire envoyant une base orthonormée de E sur une base orthonormée de E

$$f \in \mathcal{L}(E) \text{ telle que, si } \mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n) \text{ est une BON alors } (f(e_1), \dots, f(e_n)) \text{ est une BON}$$

On note $O(E)$ l'ensemble des isométries de E : on a $O(E) \subset GL(E)$

$O(E)$ est stable par la composition (si f et g sont dans $O(E)$ alors $f \circ g$ est dans $O(E)$)

$O(E)$ est stable par le passage à l'inverse (si $f \in O(E)$ alors $f^{-1} \in O(E)$)

Les symétries orthogonales sont des isométries (rappel : si F sev de E alors $F \oplus F^\perp = E$ et la symétrie par rapport à F parallèlement à $F^\perp$ est la symétrie orthogonale par rapport à F). En particulier, les réflexions (symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan) sont des isométries.

- Définition et caractérisation d'une matrice orthogonale. Ensemble $O_n(\mathbb{R})$.

Pour $M \in M_n(\mathbb{R})$, les propositions suivantes équivalentes caractérisent une matrice M orthogonale :

1) $M^T M = I_n$

2) $MM^T = I_n$

3) M est inversible et $M^{-1} = M^T$

4) les colonnes de M forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$

5) les lignes de M forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$

6) M est une matrice de passage d'une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ à une autre base orthonormée de $\mathbb{R}^n$

On note $O_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales. On a $O_n(\mathbb{R}) \subset GL_n(\mathbb{R})$

$O_n(\mathbb{R})$ est stable par le produit (si M et N sont dans $O_n(\mathbb{R})$ alors MN est dans $O_n(\mathbb{R})$)

$O_n(\mathbb{R})$ est stable par le passage à l'inverse (si $M \in O_n(\mathbb{R})$ alors $M^{-1} = M^T \in O_n(\mathbb{R})$)

- Caractérisation matricielle des isométries/ des symétries orthogonales

Dans l'espace euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$,

$u \in \mathcal{L}(E)$ est une isométrie $\Leftrightarrow \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est orthogonale lorsque $\mathcal{B}$ est une base orthonormée (BON) de E
autrement dit : $u \in O(E) \Leftrightarrow M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in O_n(\mathbb{R})$ lorsque $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de E

$u \in \mathcal{L}(E)$ est une symétrie vectorielle de $E \Leftrightarrow M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est orthogonale où $\mathcal{B}$ est une BON et $M^2 = I_n$
on sait alors que u est la symétrie orthogonale par rapport à $F = \text{Ker}(u - id)$ et que $F^\perp = \text{Ker}(u + id)$

- Sev stable par une isométrie, déterminant et spectre pour une isométrie/matrice orthogonale. Isométrie directe et indirecte. Base directe.

- Si u est une isométrie de l'espace euclidien qui laisse stable le sev F alors $F^\perp$ est aussi un sev stable par u .

- Le déterminant d'une isométrie/matrice orthogonale vaut 1 ou -1

- Les valeurs propres d'une isométrie/matrice orthogonale (éventuellement complexes) sont de modules 1

- L'ensemble des isométries directe de E est noté $SO(E)$. L'ensemble des matrices orthogonale directe est noté $SO_n(\mathbb{R})$

$$u \in SO(E) \text{ lorsque } u \in O(E) \text{ avec } \det u = 1 \quad M \in SO_n(\mathbb{R}) \text{ lorsque } M \in O_n(\mathbb{R}) \text{ et } \det M = 1$$

On a : $SO_n(\mathbb{R}) \subset O_n(\mathbb{R}) \subset GL_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R})$ et $SO_n(\mathbb{R})$ est stable par le produit et le passage à l'inverse.

- On peut orienter un espace euclidien en choisissant une base orthonormée $\mathcal{B}_0$ de référence :

lorsque $\mathcal{B}$ est une autre base orthonormée, la matrice $P = P_{\mathcal{B}_0, \mathcal{B}}$ de passage de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}$ est

4. Isométries du plan et de l'espace - Matrices orthogonales de $O_2(\mathbb{R})$ et $O_3(\mathbb{R})$

- Isométrie d'un espace euclidien de dimension 2

Soit f un endomorphisme d'un espace euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ de dimension 2

associé à la matrice $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \in M_2(\mathbb{R})$ où $\mathcal{B}$ est une BON de E

- f est une isométrie du plan $E \Leftrightarrow A \in O_2(\mathbb{R}) \Leftrightarrow$ les colonnes C_1 et C_2 de A forment une BON de $\mathbb{R}^2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C_1 \cdot C_2 = 0 \\ C_1 \cdot C_1 = 1 = C_2 \cdot C_2 \end{cases} \quad \text{où } x \cdot y \text{ est le produit scalaire usuel de } \mathbb{R}^2$$

- Si f est une isométrie du plan E , il y a alors deux possibilités (isométrie directe ou indirecte) :

$$\text{soit } \det A = 1 \Leftrightarrow A \in SO_2(\mathbb{R}) \text{ et } f \text{ est une rotation vectorielle d'angle } \theta \text{ qu'on identifie car } A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\text{soit } \det A = -1 \text{ et } f \text{ est une réflexion de } E \text{ d'axe } D = \text{Ker}(f - id)$$

- Isométrie d'un espace euclidien de dimension 3

Soit f un endomorphisme d'un espace euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ de dimension 3

associé à la matrice $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \in M_3(\mathbb{R})$ où $\mathcal{B}$ est une BON directe de E

- f est une isométrie $\Leftrightarrow A \in O_3(\mathbb{R}) \Leftrightarrow$ les colonnes (C_1, C_2, C_3) de A forment une BON de $\mathbb{R}^3$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C_1 \cdot C_2 = 0 \\ C_1 \cdot C_1 = 1 = C_2 \cdot C_2 \end{cases} \text{ et } C_1 \wedge C_2 = \pm C_3 \quad \text{où } x \cdot y \text{ est le produit scalaire usuel de } \mathbb{R}^3$$

- Si f est une isométrie de l'espace E de dimension 3, il y a alors deux possibilités (isométrie directe ou indirecte) :

soit $A \in SO_3(\mathbb{R})$ (lorsque $\begin{cases} C_1 \cdot C_2 = 0 \\ C_1 \cdot C_1 = 1 = C_2 \cdot C_2 \end{cases}$ et $C_1 \wedge C_2 = +C_3$) alors f est une rotation vectorielle.

Elle est caractérisée dans l'espace E par un axe D et un angle θ .

Son axe est l'ensemble des vecteurs invariants soit $D = \text{Ker}(f - id) = \text{Vect}(u)$ avec $\|u\| = 1$

Son angle θ s'obtient via la valeur de $\cos \theta$ et le signe de $\sin \theta$ sachant : $\text{Tr}(A) = 2 \cos \theta + 1$

et, si $v \in D^\perp$ avec $\|v\| = 1$ alors $\langle v, f(v) \rangle = \cos \theta$ et $v \wedge f(v) = (\sin \theta)u$

La BON directe $\mathcal{B}' = (u, v, u \wedge v)$ est adaptée à $E = D \oplus D^\perp$ avec : $\text{Mat}'_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$

Remarque : $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ étant des BON, la matrice de passage $P = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} \in O_3(\mathbb{R})$ d'où $P^{-1} = P^T$

soit Soit $A \in O_3(\mathbb{R}) - SO_3(\mathbb{R})$ (lorsque $\begin{cases} C_1 \cdot C_2 = 0 \\ C_1 \cdot C_1 = 1 = C_2 \cdot C_2 \end{cases}$ et $C_1 \wedge C_2 = -C_3$) alors

f est la composée d'une rotation vectorielle r et d'une réflexion s

La rotation r est caractérisée par un axe D et un angle θ et la réflexion s par son plan de réflexion $D^\perp$.

L'axe de r est l'ensemble des vecteurs envoyés sur leurs opposés soit $D = \text{Ker}(f + id) = \text{Vect}(u)$ avec $\|u\| = 1$.

La réflexion s est celle par rapport à $D^\perp$ dont on détermine une équation à l'aide du vecteur normal $\vec{u}$.

On trouve l'angle θ via $\cos \theta$ et le signe de $\sin \theta$ sachant : $\text{Tr}(A) = 2 \cos \theta - 1$

et, si $v \in D^\perp$ avec $\|v\| = 1$ alors $\langle v, f(v) \rangle = \cos \theta$ et $v \wedge f(v) = (\sin \theta)u$

La BON directe $\mathcal{B}' = (u, v, u \wedge v)$ est adaptée à $E = D \oplus D^\perp$ et : $\text{Mat}'_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$

Remarque 1 : si $\theta \equiv 0[2\pi]$, $r = id_{\mathbb{R}^3}$ et $f = s$ est une réflexion par rapport à $D^\perp$

Remarque 2 : $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ étant des BON, la matrice de passage $P = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} \in O_3(\mathbb{R})$ d'où $P^{-1} = P^T$

Normalement, l'étude d'une isométrie indirecte qui ne serait pas une réflexion doit être guidée.

5. Matrice symétrique et applications

- Connaissances sur les matrices symétriques réelles

Une matrice est symétrique est une matrice A avec $A^T = A$ soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in M_n(\mathbb{K})$ avec : $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $a_{ij} = a_{ji}$

L'ensemble $S_n(\mathbb{R})$ des matrices réelles est un sev de $M_n(\mathbb{R})$ de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$ dont une base naturelle est construite à

l'aide des matrices de la base canonique de $M_n(\mathbb{R})$ part $\left((E_{ii})_{1 \leq i \leq n} \cup (E_{ij} + E_{ji})_{1 \leq i < j \leq n} \right)$ contenant bien $n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$ vecteurs

Dans l'espace euclidien $M_n(\mathbb{R})$ munit du produit scalaire usuel :

$S_n(\mathbb{R})^\perp = A_n(\mathbb{R})$ ensemble des matrices antisymétriques à coefficients réelles càd des matrices A avec $A^T = -A$

soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in M_n(\mathbb{R})$ avec : $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $a_{ij} = -a_{ji}$ (entraînant de fait : $a_{ii} = 0$)

Dans $M_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$, on a : $\forall M \in M_n(\mathbb{R})$, $M = \underbrace{\frac{M + M^T}{2}}_{=S \in S_n(\mathbb{R})} + \underbrace{\frac{M - M^T}{2}}_{=A \in A_n(\mathbb{R})}$ ce qui permet de définir le projecteur

orthogonal sur $S_n(\mathbb{R})$ et la symétrie associée.

- Théorème spectral pour les matrices symétriques

Une matrice symétrique réelle A est diagonalisable à valeurs propres réelles avec une matrice de passage orthogonale

$\forall A \in S_n(\mathbb{R}), \exists P \in O_n(\mathbb{R}), D = P^T A P = P^{-1} A P$ est diagonale et réelle

On dit que la matrice est orthogonalement diagonalisable

Cela signifie qu'il existe une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de A associés à des valeurs propres toutes réelles (base de diagonalisation) et la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ à cette base donne la matrice orthogonale P de changement de bases.