

1. Bilan Espace Préhilbertien et Euclidien

- Définition d'un produit scalaire sur un $\mathbb{R}$ espace vectoriel E et de la norme associée.

Un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur E est une forme bilinéaire, symétrique, définie positive

- $\forall (x, y) \in E^2, \langle x, y \rangle$ existe et c'est un réel
- elle est symétrique : $\forall (x, y) \in E^2, \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
- elle est bilinéaire i.e. $[x \mapsto \langle x, y \rangle]$ (y fixé) et $[y \mapsto \langle x, y \rangle]$ (x fixé) sont dans $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$
Si on a prouvé la symétrie, il suffit de vérifier la linéarité d'une seule des applications.
- elle est positive : $\forall x \in E, \langle x, x \rangle \geq 0$
- elle est définie : $\forall x \in E, \langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0_E$

La norme sur E associée à ce produit scalaire est donnée par : $\forall x \in E, \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$

On a : $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ et $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$

- Les produits scalaires usuels (*qu'il faut savoir justifier éventuellement*)

- sur $\mathbb{R}^n$: $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ où $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ et $\vec{y} = (y_1, \dots, y_n)$ tel que la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est une BON

- sur $\mathbb{R}_n[X]$: $\langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^n a_k b_k$ où $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^n b_k X^k$ tel que la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est une BON

mais aussi : $\langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^n P(\alpha_k) Q(\alpha_k)$ où $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont des réels 2 à 2 distincts

Outil pour la preuve : un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ non nul a au plus n racines distinctes

- sur $M_n(\mathbb{R})$: $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^T B) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} b_{ij}$ où $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ et $B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ tel que la base canonique de $M_n(\mathbb{R})$ est une BON Outil pour la preuve : propriété de la trace et transposition et définition du produit matriciel
 $[AB]_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$

- sur $C^0([a, b], \mathbb{R})$: $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t) g(t) dt$ Outil pour la preuve : propriétés de l'intégrale

Si I est un intervalle quelconque, la convergence de l'intégrale $\langle f, g \rangle = \int_I f(t) g(t) dt$ n'est pas assurée sur $C^0(I, \mathbb{R})$

L'inégalité $|fg| \leq \frac{1}{2}(f^2 + g^2) \Leftrightarrow (|f| - |g|)^2 \geq 0$ assure la convergence sur le sev des fonctions f avec f^2 intégrables sur I .

- sur $\mathbb{R}[X]$ (et donc aussi sur $\mathbb{R}[X]$) : $\langle P, Q \rangle = \int_a^{a+\varepsilon} P(t) Q(t) dt$ où $a \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$

Outil pour la preuve : propriétés de l'intégrale + un polynôme qui a une infinité de racines distinctes est nul

- Identités du parallélogramme et identités de polarisation

La norme associée à un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur E est définie par : $\forall x \in E, \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$

On a : $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ et $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$

Identité du parallélogramme : $\forall (x, y) \in E^2, \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$

Identités de polarisation : $\forall (x, y) \in E^2, \langle x, y \rangle = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) = \frac{1}{2} (\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2)$

- Inégalités triangulaire et Inégalité de Cauchy-Schwarz

Si $\|\cdot\|$ est une norme associée à un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur le $\mathbb{R}$ espace vectoriel E ,

Inégalité triangulaire : $\forall (x, y) \in E^2, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Inégalité de Cauchy-Schwarz : $\forall (x, y) \in E^2, |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$

Ces inégalités deviennent des égalités si et seulement si x et y sont colinéaires.

- Vecteurs orthogonaux, famille orthogonale et théorèmes de Pythagore

Si $\|\cdot\|$ est une norme associée à un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur le $\mathbb{R}$ espace vectoriel E ,

Théorème de Pythagore : Pour $(x, y) \in E^2$, x et y sont orthogonaux ie $\langle x, y \rangle = 0 \Leftrightarrow \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

Théorème de Pythagore généralisé : Si $(e_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ est une famille de vecteurs de E

Si $(e_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ est une famille orthogonale ie $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, i \neq j \Rightarrow \langle e_i, e_j \rangle = 0$ alors

$$\|e_1 + e_2 + \dots + e_n\|^2 = \sum_{i=1}^n \|e_i\|^2$$

- Connaissances sur l'orthogonal d'un sev? Cas particulier d'un sev de dimension finie. Cas d'un hyperplan dans un espace euclidien.

- Si E est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel munit d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et si F est un sous-espace vectoriel (sev) de E

l'orthogonal $F^\perp$ de F est $F^\perp = \{x \in E \mid \forall y \in F, \langle x, y \rangle = 0\}$

C'est un sev de E qui vérifie : $F \cap F^\perp = \{0_E\}$ soit $F \oplus F^\perp \subset E$ et $F \subset (F^\perp)^\perp$

Et : $\{0_E\}^\perp = E$ (0_E est orthogonal à tous les vecteurs) et $E^\perp = \{0_E\}$ (un vecteur orthogonal à tous les vecteurs est nul)

- Si F est de dimension finie avec $F = \text{Vect}((e_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket})$ alors : $x \in F^\perp \Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \langle x, e_i \rangle = 0$ **Important en pratique!**

De plus : $F = (F^\perp)^\perp$ et $F \oplus F^\perp = E$ et on dit que $F^\perp$ est le supplémentaire orthogonal de F dans $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$

En particulier, si $\dim E < +\infty$, on a : $\dim(F^\perp) = \dim E - \dim F$

- En particulier, si $F = H$ est un hyperplan de l'espace euclidien E alors $\dim H^\perp = 1$. Un vecteur qui engendre $H^\perp$ est appelé vecteur normal à H et, si on connaît H par une équation linéaire non triviale $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0$ dans une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E alors $H^\perp = \text{Vect}(\vec{a})$ avec $\vec{a} = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n$ vecteur normal à H

- Familles orthogonales et indépendance linéaire. Sev orthogonaux éventuellement supplémentaires orthogonaux.

Si E est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel munit d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$,

- une famille $(e_i)_{i \in I}$ de vecteurs de E (I ensemble quelconque) est orthogonale lorsque : $\forall (i, j) \in I^2, i \neq j \Rightarrow \langle e_i, e_j \rangle = 0$

Une famille orthogonale est une famille libre de vecteurs de E

- les sev F et G sont orthogonaux si $\forall (f, g) \in F \times G, \langle f, g \rangle = 0$.

Si F et G sont orthogonaux alors $F \cap G = \{0_E\}$ (la somme est directe)

F et G sont des sev supplémentaires orthogonaux $\Leftrightarrow \begin{cases} F \text{ et } G \text{ sont orthogonaux donc } F \oplus G \subset E \\ E \subset F + G \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ si $\dim E < +\infty \begin{cases} F \text{ et } G \text{ sont orthogonaux donc } F \cap G = \{0_E\} \\ \dim F + \dim G = \dim E \end{cases}$

- Base orthonormée et calculs dans une base orthonormée.

- Une base orthonormée de E est une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E qui est une famille orthonormée càd une famille orthogonale de vecteurs unitaires autrement dit : $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad \langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$
- Si E est un espace euclidien (càd $\dim E < +\infty$) et si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de E alors :
 - les coordonnées du vecteur x sont $\left(\langle e_i, x \rangle \right)_{1 \leq i \leq n}$ càd $x = \sum_{i=1}^n \langle e_i, x \rangle e_i$
 - si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ sont les coordonnées de x et y , alors $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i = X^T Y$ et $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$
 - si $f \in \mathcal{L}(E)$ alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \left(\langle e_i, f(e_j) \rangle \right)_{1 \leq i, j \leq n}$

- Algorithme de Gram-Schmidt

L'algorithme dit d'orthonormalisation de Gram-Schmidt permet de construire une famille orthonormale à partir d'une famille libre de vecteurs de E . Il permet donc de justifier l'existence des bases orthonormées dans un espace euclidien.

Énoncé du théorème d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Il existe une unique famille orthonormée $(\varepsilon_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ construite à partir de la famille libre $(e_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ telle que :

1) $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \text{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ et 2) $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \langle \varepsilon_k, e_k \rangle > 0$

Remarque : la condition 2 permet d'assurer l'unicité de la famille construite.

Mise en place de l'algorithme sur une famille libre $(e_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$

- Etape n° 1 : $\varepsilon_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}$
- Etape n° 2 : $\varepsilon_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|}$ où $u_2 = e_2 - \langle e_2, \varepsilon_1 \rangle \varepsilon_1$
- Etape n° 3 : $\varepsilon_3 = \frac{u_3}{\|u_3\|}$ où $u_3 = e_3 - \langle e_3, \varepsilon_1 \rangle \varepsilon_1 - \langle e_3, \varepsilon_2 \rangle \varepsilon_2$
- Etape n° k : Si $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{k-1})$ est construit, on construit $\varepsilon_k = \frac{u_k}{\|u_k\|}$ où $u_k = e_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle e_k, \varepsilon_i \rangle \varepsilon_i$

Interprétation en terme de projection orthogonale : $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ est un hyperplan de $E = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k, e_{k+1})$

Si $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$ est construit, puisque $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k) = \text{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$ alors $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$ est une BON de F .
Puisque $F \oplus F^\perp = E$, $F^\perp$ est une droite vectorielle de E qui sera dirigée par le vecteur unitaire ε_{k+1} .

On sait trouver le projeté orthogonal $p(e_{k+1})$ de e_{k+1} sur F à l'aide de la base orthonormée : $p(e_{k+1}) = \sum_{i=1}^k \langle e_{k+1}, \varepsilon_i \rangle \varepsilon_i$

Puisque e_{k+1} n'est pas dans F , le vecteur $u_{k+1} = e_{k+1} - p(e_{k+1})$ est dans $F^\perp$: il est donc colinéaire à ε_{k+1} .

Comme ce dernier est unitaire : $\varepsilon_{k+1} = \frac{u_{k+1}}{\|u_{k+1}\|}$ où $u_{k+1} = e_{k+1} - p(e_{k+1})$

- Projection orthogonale sur un sev de dimension finie dans un espace préhilbertien.

Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, on a $F \oplus F^\perp = E$ et le projecteur p_F sur F parallèlement à $F^\perp$ est appelé la projection orthogonale sur F .

On dispose de deux méthodes pour calculer un projeté orthogonal :

Méthode n° 1 Calcul du projeté orthogonal à l'aide d'une base orthonormée $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ de F

Si $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ est une base orthonormée de F , on a : $\forall x \in E, \quad p_F(x) = \sum_{i=1}^n \langle x, \varepsilon_i \rangle \varepsilon_i$

Cas particulier ou $F = H$ hyperplan d'un espace euclidien E $p_F(x) = x - p_{F^\perp}(x)$ où $p_{F^\perp}(x)$ est le projeté orthogonal de x sur $F^\perp$ qu'on calcule facilement : $p_{F^\perp}(x) = \langle x, \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} \rangle \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}$ où $\vec{n}$ est un vecteur non nul de $F^\perp$

Méthode n° 2 On utilise la caractérisation du projeté orthogonal : $y = p_F(x) \Leftrightarrow y \in F \quad \text{et} \quad x - y \in F^\perp$

Si $(f_1, \dots, f_n)$ est une base quelconque de F :

$p_F(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i$ où on recherche les n scalaires inconnus $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ à l'aide d'un système linéaire :

$$\begin{cases} \langle x - p_F(x), f_1 \rangle = 0 \\ \langle x - p_F(x), f_2 \rangle = 0 \\ \vdots \\ \langle x - p_F(x), f_n \rangle = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \langle p_F(x), f_1 \rangle = \langle x, f_1 \rangle \\ \langle p_F(x), f_2 \rangle = \langle x, f_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle p_F(x), f_n \rangle = \langle x, f_n \rangle \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 \langle f_1, f_1 \rangle + \alpha_2 \langle f_2, f_1 \rangle + \dots + \alpha_n \langle f_n, f_1 \rangle = \langle x, f_1 \rangle \\ \alpha_1 \langle f_1, f_2 \rangle + \alpha_2 \langle f_2, f_2 \rangle + \dots + \alpha_n \langle f_n, f_2 \rangle = \langle x, f_2 \rangle \\ \vdots \\ \alpha_1 \langle f_1, f_n \rangle + \alpha_2 \langle f_2, f_n \rangle + \dots + \alpha_n \langle f_n, f_n \rangle = \langle x, f_n \rangle \end{cases}$$

- Distance à un sous-espace vectoriel de dimension finie dans un espace préhilbertien.

Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$,

Pour tout $x \in E$, $d(x, F) = \inf \{ \|x - y\| \mid y \in F \}$ La projection orthogonale $p_F(x)$ sur F est l'unique vecteur de

F qui minimise la distance de x à un vecteur de F autrement dit : $d(x, F) = \|x - p_F(x)\| = \sqrt{\|x\|^2 - \|p_F(x)\|^2}$

Exemples à connaître : $\sum_{n=0}^{+\infty} nx^n$, $\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n}$ lorsqu'elles existent

• Pour les trois premières séries, on sait d'après le cours (cf. outil n°3) que ces séries ont le même rayon de convergence qui vaut $R = 1$. On calcule donc les sommes pour $|x| < 1$.

• Si on applique le théorème de dérivation terme à terme à la série géométrique, on a, pour $|x| < 1$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1-x} \right) = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{1}{1-x} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{(1-x)^2} \right) = \frac{2}{(1-x)^3}$$

Ici : $\sum_{n=0}^{+\infty} nx^n = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^n = x \left(\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} \right) = x \times \frac{1}{(1-x)^2} \Leftrightarrow \boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2} \text{ pour } |x| < 1}$

le terme d'indice $n = 0$ est nul la factorisation par x est possible

Et : $n^2 = n(n-1) + n$ (On peut bien souvent éviter une méthode de coefficients indéterminés pour déterminer $n^2 = an(n-1) + bn + c$.)

aussi : $\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (n(n-1) + n)x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (n(n-1)x^n + nx^n)$

On peut séparer les sommes car ici toutes les sommes convergent pour $|x| < 1$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} nx^n && \text{On peut modifier l'indice de départ car les premiers termes de ces sommes sont nuls} \\ &= x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} + x \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} && \text{par factorisation possible dans les sommes} \\ &= x^2 \times \frac{2}{(1-x)^3} + x \times \frac{1}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

• Si on applique le théorème d'intégration terme à terme à la série géométrique, on a, pour $|x| < 1$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x t^n dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} t^n \right) dt = \int_0^x \frac{dt}{1-t} = [-\ln(1-t)]_0^x = -\ln(1-x)$$

Ainsi : $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1} = -\ln(1-x) \text{ pour } |x| < 1}$

en posant $n = k+1 \Leftrightarrow k = n-1$

• Calculons la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$. On vient de voir que : $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$

La fonction S est la somme d'une série entière donc on sait qu'elle est continue sur son domaine de définition.

Or, la fonction S est définie sur $[-1, 1[$ puisque la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge par le théorème des séries alternées permettant de définir $S(-1)$. Par continuité : $S(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^+} S(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (-\ln(1-x)) = -\ln 2$ soit

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2.}$$

• Calculons le rayon de convergence R de $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n}$ avec la règle de d'Alembert avec $u_n = (-1)^n \frac{x^{2n}}{n}$

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \left| \frac{\frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{n+1}}{\frac{(-1)^n x^{2n}}{n}} \right| = \frac{n}{n+1} |x|^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} |x|^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} |x|^2$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Si } |x|^2 < 1 \Leftrightarrow |x| < 1 \text{ alors la série CVA donc } R \geq 1 \\ \text{Si } |x|^2 > 1 \Leftrightarrow |x| > 1 \text{ alors la série DVG donc } R \leq 1 \end{array} \right\} \Rightarrow R = 1$$

Pour le calcul de la somme pour $|x| < 1$, on remarque : $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-x^2)^n}{n}$

Mais : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u^n}{n} = -\ln(1-u)$ pour $|u| < 1$ aussi pour $u = -x^2$ puisque $|u| = |x|^2 < 1$ vu que $|x| < 1$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n} = -\ln(1 - (-x^2)) \Leftrightarrow \boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n} = -\ln(1+x^2) \text{ pour } |x| < 1}$$

Pour $x = \pm 1$, $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$ (vu auparavant)