

1. Bilan sur les séries numériques en PT

- Convergence, somme partielle somme et reste d'ordre n

- La série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ converge si la suite des sommes partielles $(S_n)_{n \geq n_0}$ convergent (où $S_n = \sum_{k=n_0}^n u_k$)
- La limite est alors appelée la somme de la série et on note : $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$
- On appelle reste d'ordre n de la série convergente $\sum_{n \geq n_0} u_n$ le réel $R_n = \sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=n_0}^n u_k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ et on a : $R_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

- Divergence grossière et convergence absolue d'une série et lien entre ces notions et celle de convergence de la série

- Si la série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ converge alors $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Dans le cas contraire, on dit que la série diverge grossièrement.
- La série $\sum u_n$ converge absolument (CVA) lorsque $\sum |u_n|$ converge.
- On sait que : $\sum u_n$ CVA $\Rightarrow \sum u_n$ CV **Attention!** Réciproque fausse. Contre-ex : $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$
et : $\sum u_n$ CV $\Rightarrow u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ (soit $\sum u_n$ ne diverge pas grossièrement) ou encore, par contraposée : $\sum u_n$ DVG $\Rightarrow \sum u_n$ DV

- Séries de références en PT

- La série télescopique $\sum_{n \geq n_0} (a_{n+1} - a_n)$ a même nature que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Si elle converge, sa somme est $S = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n - a_{n_0}$
- La série géométrique $\sum_{n \geq n_0} q^n$ converge (absolument) si et seulement si $|q| < 1$ et, dans ce cas, sa somme vaut : $S = q^{n_0} \times \frac{1-0}{1-q}$
- Les séries de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge (absolument) si et seulement si $\alpha > 1$ (encadrement de la somme par comparaison série/intégrale)
- La série de l'exponentielle $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$ converge (absolument) pour tout $z \in \mathbb{C}$ et : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$

- Séries à termes de signe constant

Si une série $\sum u_n$ est à termes de signe constant alors la suite des sommes partielles est monotone.

Si $u_n \geq 0$ alors (S_n) est croissante. Dés lors, en vertu du théorème de convergence monotone :

soit (S_n) est majorée et alors $\sum u_n$ converge soit $S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$

Si $u_n \leq 0$ alors (S_n) est décroissante. Dés lors, en vertu du théorème de convergence monotone :

soit (S_n) est minorée et alors $\sum u_n$ converge soit $S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$

- Énoncer les théorèmes de comparaison pour les séries.

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq u_n \leq v_n \text{ à partir d'un certain rang} \\ \sum v_n \text{ CV} \end{array} \right\} \Rightarrow \sum u_n \text{ CV} \quad \text{(majoration)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq u_n \leq v_n \text{ à partir d'un certain rang} \\ \sum u_n \text{ DV} \end{array} \right\} \Rightarrow \sum v_n \text{ DV} \quad \text{(minoration)}$$

- $u_n \sim v_n > 0 \Rightarrow \sum u_n$ et $\sum v_n$ ont la même nature (critère d'équivalence)

Attention! Les sommes des séries ne sont pas égales!

On a aussi : Si $u_n \sim v_n$ alors $\sum u_n$ converge absolument (CVA) $\Leftrightarrow \sum v_n$ converge absolument (CVA)

$$\left\{ \begin{array}{l} u_n = O(v_n) \text{ (donc aussi } u_n = o(v_n)) \\ \sum v_n \text{ converge absolument (CVA)} \end{array} \right\} \Rightarrow \sum u_n \text{ CVA} \quad \text{(règle du O ou du o)}$$

- Somme de séries convergente et inégalité triangulaire

- On ne peut écrire $\sum_{n=n_0}^{+\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n$ que si on sait que 2 (au moins) des trois séries convergent.

$$\text{Si la série } \sum u_n \text{ converge absolument, } \left| \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} |u_n|$$

- Règle de d'Alembert

Soit $\sum u_n$ une série à terme non nuls avec $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \in [0, \infty[$ alors

- si $\ell > 1$ (y compris $+\infty$), $\sum u_n$ DV (grossièrement) - si $\ell < 1$, $\sum u_n$ CVA - si $\ell = 1$, on ne peut rien conclure

- Connaissance sur le produit de Cauchy de deux séries numériques

• Le produit de Cauchy des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ est la série $\sum w_n$ où $w_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k}$.

• Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ converge absolument toutes les deux alors le produit de Cauchy $\sum w_n$ CVA et on a : $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right)$

- Connaissance sur le théorème des séries alternées

Si $u_n = (-1)^n v_n$ où $v_n > 0$ (autrement dit $v_n = |u_n|$) avec la suite (v_n) qui tend vers 0 en décroissant alors $\sum u_n$ converge

Lorsque la convergence est obtenue à l'aide du théorème des séries alternées,

-la somme de la série est alors toujours comprise entre deux sommes partielles consécutives.

-on a une majoration du reste $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k : |R_n| \leq |u_{n+1}|$

2. Polynômes (Bilan PTSI)

- Énoncé du théorème de division euclidienne

Si $B \in \mathbb{K}[X]$ avec $B \neq 0$ alors $\exists!(Q, R) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$, $A = BQ + R$ avec $\deg R < \deg B$

- Connaissances sur les racines d'un polynôme non nul de degré n

$a \in \mathbb{K}$ est une racine de $P \in \mathbb{K}[X]$ lorsque $P(a) = 0 \Leftrightarrow \exists Q \in \mathbb{K}[X]$, $P = (X - a)Q$

$a \in \mathbb{K}$ est une racine de multiplicité $k \in [1, n]$ lorsque

$$P(a) = P'(a) = \dots = P^{(k-1)}(a) = 0 \text{ et } P^{(k)}(a) \neq 0 \Leftrightarrow \exists Q \in \mathbb{K}[X], P = (X - a)^k Q \text{ et } Q(a) \neq 0$$

Un polynôme non nul de degré n admet au plus n racines distinctes ainsi, si un polynôme a plus de racines distinctes que son degré (par exemple il a une infinité de racines distinctes), alors il est nul.

- Forme scindée d'un polynôme et théorème de d'Alembert-Gauss

Un polynôme est scindé dans $\mathbb{K}[X]$ lorsqu'il s'écrit comme un produit de polynômes de $\mathbb{K}_1[X]$ (càd de degré ≤ 1)

Les polynômes de $\mathbb{C}[X]$ sont scindés :

$$\forall P \in \mathbb{C}[X], P = a \prod_{k=1}^n (X - \alpha_k) \text{ avec } \begin{cases} a \in \mathbb{C} \\ (\alpha_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{C}^n \text{ non nécessairement distincts} \end{cases}$$

Ou encore : un polynôme non nul de degré n dans $\mathbb{C}[X]$ admet n racines dans $\mathbb{C}$ (comptées avec multiplicité)

- Théorème de décomposition en facteurs irréductibles

Un polynôme P est irréductible lorsque les diviseurs de P sont soit constants soit associés à P

autrement dit : si Q divise P alors $\exists \alpha \in \mathbb{K}$, $Q = \alpha$ ou $Q = \alpha P$

Dans $\mathbb{C}[X]$, les polynômes irréductibles sont ceux de degré 1.

Tout polynôme non nul de $\mathbb{C}[X]$ de degré n s'écrit sous la forme d'un produit de polynômes irréductibles :

$$a_n \prod_{k=1}^n (X - \alpha_k) \text{ avec } \begin{cases} a_n \neq 0 \text{ est le coefficient dominant} \\ \alpha_1, \dots, \alpha_n \text{ les racines complexes (non distinctes)} \end{cases}$$

Dans $\mathbb{R}[X]$, les polynômes irréductibles sont ceux de degré 1 et ceux de degré 2 à discriminant négatif.

Tout polynôme non nul de $\mathbb{R}[X]$ de degré n s'écrit sous la forme d'un produit de polynômes irréductibles :

$$a_n \prod_{k=1}^p (X - \alpha_k) \prod_{j=1}^q (X^2 + b_j X + c_j) \text{ où } \begin{cases} a_n \neq 0 \text{ est le coefficient dominant} \\ \alpha_1, \dots, \alpha_p \text{ les racines réelles (non distinctes)} \\ b_j, c_j \text{ sont réels avec } b_j^2 - 4c_j < 0 \text{ pour } j \in [1, q] \end{cases} \text{ et avec } p + 2q = n$$