

EXERCICES SUR LE CHAPITRE IX : ESPACES PRÉHILBERTIENS ET EUCLIDIENS*Exemples du cours*

Produits scalaires étudiés en classe

- Le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$: $\langle x, y \rangle = X^T Y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ où $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$
- Le produit scalaire usuel sur $\ell_2(\mathbb{N}) = \{u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \sum u_n^2 \text{ converge}\}$: $\langle u, v \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$
- Le produit scalaire usuel de $C^0([a, b], \mathbb{R})$: $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt$
- Le produit scalaire sur $L_2(I, \mathbb{R}) = \{f \in C^0(I, \mathbb{R}) \mid f^2 \text{ est intégrable sur } I\}$: $\langle f, g \rangle = \int_I f(t)g(t)dt$
- Les produits scalaires sur $\mathbb{R}_n[X]$: $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$ et $\langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^n a_k b_k$ où $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^n b_k X^k$
- Le produit scalaire usuel de $M_n(\mathbb{R})$: $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^T B) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [A]_{ij} [B]_{ij}$ où on note $[M]_{ij}$ le coefficient ligne i , colonne j de la matrice M

EXEMPLE N° 1 Démontrer que, pour tout $(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathbb{R}^{n^2}$, on a : $\left| \sum_{i=1}^n a_{ii} \right| \leq \sqrt{n} \sqrt{\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij}^2}$

On pourra utiliser le produit scalaire canonique dans $M_n(\mathbb{R})$

EXEMPLE N° 2 Si F est un sous-espace vectoriel d'un espace préhilbertien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$,
Montrer que : $F \oplus F^\perp = E \Rightarrow (F^\perp)^\perp = F$ *Cela sera en particulier vérifié si F est de dimension finie*

EXEMPLE N° 3 On définit, sur $\mathbb{R}_2[X]$: $\langle P, Q \rangle = P(-1)Q(-1) + P(0)Q(0) + P(1)Q(1)$

1. Justifier que $(\mathbb{R}_2[X], \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace euclidien.
2. Déterminer l'orthogonal de $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X], P(1) = 0\}$

EXEMPLE N° 4 Dans $E = C^0([0, 2\pi], \mathbb{R})$ munit du produit scalaire : $\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$
on définit, pour tout entier naturel n , $f_n = [t \mapsto \cos(nt)]$ et $g_n = [t \mapsto \sin(nt)]$

1. Montrer que $F = \text{Vect}(f_n \mid n \in \mathbb{N}^*)$ et $G = \text{Vect}(g_n \mid n \in \mathbb{N}^*)$ sont des sev orthogonaux.
2. Montrer que les familles $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(g_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont orthonormées.

EXEMPLE N° 5 Déterminer une base orthonormée de l'hyperplan H de $\mathbb{R}^4$ d'équation $x + y + z + t = 0$

SUITE DE L'EXEMPLE 3 On munit $\mathbb{R}_2[X]$ du produit scalaire : $\langle P, Q \rangle = P(-1)Q(-1) + P(0)Q(0) + P(1)Q(1)$

3. Trouver une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$ pour ce produit scalaire.

EXEMPLE N° 6 Dans l'espace euclidien usuel $\mathbb{R}^4$, on considère le sev F d'équation $\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x - y + z - t = 0 \end{cases}$.

Déterminer la matrice canoniquement associée à la projection orthogonal sur F .

Quelle est la matrice de la symétrie orthogonale ?

Donner la distance de $\vec{u} = (1, 2, 3, 4)$ à F .

SUITE DE L'EXEMPLE N° 5 Expliciter $H^\perp$. Proposer deux méthodes pour calculer le projeté de $u \in \mathbb{R}^4$ sur H .

EXEMPLE N° 7 $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$ est muni de son produit scalaire canonique. Calculer $\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 t^2 (\ln t - at - b)^2 dt$

Exercices

EXERCICE N° 1 Les questions sont indépendantes

1. Démontrer que $\langle f, g \rangle = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)dt$ définit un produit scalaire de $E = C^1([0, 1], \mathbb{R})$
2. Démontrer, en utilisant habilement l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $E = C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, que: $\int_0^1 \sqrt{t}e^{-t} dt \leq \frac{\sqrt{1-e^{-2}}}{2}$

EXERCICE N° 2 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on munit $M_n(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique: $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^T B)$

1. Dans cette question, on suppose $n = 2$. On pose:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

- a. Justifier que $\mathcal{B} = (M_1, M_2, M_3)$ est une base de $F = \text{Ker tr}$.
 - b. Construire alors une base orthonormée de F en s'appuyant sur la base $\mathcal{B}$.
 - c. Déterminer la projection orthogonale de $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur F puis la distance de M à F .
2. Dans cette question, on revient au cas général où $n \in \mathbb{N}^*$ est quelconque.
 - a. Prouver que $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont des supplémentaires orthogonaux de $M_n(\mathbb{R})$.
 - b. Pour $M \in M_n(\mathbb{R})$, préciser le projeté orthogonal $P(M)$ de M sur $S_n(\mathbb{R})$ et $d(M, S_n(\mathbb{R}))$ en fonction de M .
 - c. *Application:* Si $M = \sum_{i=1}^n E_{ii}$ où $(E_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ est la base canonique de $M_n(\mathbb{R})$, préciser $d(M, S_n(\mathbb{R}))$

EXERCICE N° 3 Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ usuel,

déterminer la distance de $(1, 0, \dots, 0)$ à $H = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1 - x_n = 0\}$

EXERCICE N° 4 Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \geq 1$. On dit que

l'endomorphisme f de $\mathcal{L}(E)$ est symétrique lorsque: $\forall (x, y) \in E^2, \langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle$

1. Justifier que, lorsque f est symétrique, alors $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$ sont des supplémentaires orthogonaux.
2. Montrer que les sous-espaces propres d'un endomorphisme f symétrique sont deux à deux orthogonaux.

EXERCICE N° 5 Dans l'espace $E = \mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$) munit du produit scalaire usuel, on fixe

(e_1, e_2) une famille libre et u_1 et u_2 deux vecteurs non nuls

On définit alors, pour $x \in E$: $f(x) = \langle u_1, x \rangle e_1 + \langle u_2, x \rangle e_2$

1. Montrer que f est un endomorphisme de E
2. Montrer que $\text{rg}(f) \leq 2$
3. Montrer que $\text{Ker } f = \text{Vect}(u_1, u_2)^\perp$
4. On suppose que $\langle u_1, e_1 \rangle = \langle u_2, e_2 \rangle = 0$ et $\langle u_1, e_2 \rangle \neq 0, \langle u_2, e_1 \rangle \neq 0$. Montrer que $\text{rg}(f) = 2$
5. À quelles conditions f est-il alors diagonalisable?