

EXEMPLE DU COURS SUR LE CHAPITRE VIII

EXEMPLE N° 1 Déterminer et représenter l'ensemble de définition et expliciter les applications partielles

$$f_1(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \quad f_2(x, y) = \frac{\sqrt{x+y}}{x^2 y} \quad f_3(x, y) = \ln(1 - x^2 - y^2) \quad f_4(x, y) = \operatorname{Arcsin}\left(\frac{2xy}{x^2 + y^2}\right)$$

Un contre-exemple

$\left[f_1 : (x, y) \mapsto \frac{xy}{x^2 + y^2} \right]$ n'a pas de limite en $(0, 0)$ bien que ses applications partielles ont des limites en $t = 0$.

En imposant $f_1(0, 0) = 0$, f_1 est donc un exemple d'application ayant des applications partielles continue sur $\mathbb{R}$ sans toutefois que f_1 ne soit une application C^0 sur $\mathbb{R}^2$. L'application f_1 possède même des dérivées partielles définie sur $\mathbb{R}^2$ alors qu'elle n'est pas continue sur $\mathbb{R}^2$. Cette fonction est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ mais elle n'est pas de classe C^1 au voisinage de $(0, 0)$.

SUITE EXEMPLE N° 1 Justifier la continuité des applications de l'exemple 1 sur leurs domaines de définition

EXEMPLE N° 2 Étudions la continuité des applications suivantes : $g(0, 0) = h(0, 0) = 0$ et, pour $(x, y) \neq (0, 0)$:

$$g(x, y) = \operatorname{Arcsin}\left(\frac{2xy}{x^2 + y^2}\right) \quad \text{et} \quad h(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$$

1. Justifier la continuité de g et h sur $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$
2. a. Justifier que les applications partielles de g en $(0, 0)$ sont continues
b. Déterminer $\lim_{t \rightarrow 0} g(t, t)$ Que pouvez-vous dire de la continuité de g en $(0, 0)$?
3. Justifier que, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$, $|h(x, y) - h(0, 0)| \leq |y|$ En déduire que h est continue en $(0, 0)$.

EXEMPLE N° 3

1. Déterminer les applications dérivées partielles de f si $f(x, y, z) = xyz^2$
2. Étudier l'existence de $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ et de $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$

$$\text{a) } f(x, y) = \frac{x^3}{x^2 + y^2} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \text{ et } 0 \text{ sinon} \quad \text{b) } f(x, y) = (x^2 + y) \ln(x^2 + y^2) \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \text{ et } 0 \text{ sinon}$$

EXEMPLE N° 4 Préciser si f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ lorsque

$$1) f(x, y) = \frac{x^3}{x^2 + y^2} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \text{ et } f(0, 0) = 0 \quad 2) f(x, y) = xy \ln(x^2 + y^2) \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \text{ et } 0 \text{ sinon}$$

Pour 2), on pourra écrire $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ et remarquer que $(x, y) \rightarrow (0, 0) \Leftrightarrow r \rightarrow 0$

EXEMPLE N° 5 Justifier que $[f : (x, y) \mapsto \cos(xy)]$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et calculer les dérivées partielles seconde.

EXEMPLE N° 6 *Le contre-exemple proposé par Schwarz en 1873*

On donne la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par: $f(x, y) = 0$ si $xy = 0$ et $f(x, y) = x^2 \operatorname{Arctan} \frac{y}{x} - y^2 \operatorname{Arctan} \frac{x}{y}$ si $xy \neq 0$

1. Montrer que f est admet des dérivées partielles à l'ordre 1 sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que f n'est pas C^2 sur $\mathbb{R}^2$. On pourra comparer les dérivées croisées en $(0, 0)$.

EXEMPLE N° 7 On considère $\left[\begin{array}{l} f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) \mapsto (u, v, ue^v) \end{array} \right]$

1. Justifier que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et préciser ces dérivées partielles.
2. Justifier l'existence et déterminer les dérivées partielles secondes.

EXEMPLE N° 8 Soit f une application de classe C^1 sur $] -a, a[\times] -a, a[$ avec $a > 1$, démontrer que $[\varphi : t \mapsto f(\cos t, \sin t)]$ est C^1 sur $\mathbb{R}$ et déterminer $\varphi'(t)$ à l'aide des dérivées partielles de f .

EXEMPLE N° 9 Soit une fonction f de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, justifier que g où $g(x, y) = f(xy, x + y^2)$ est aussi de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et calculer ses dérivées partielles à l'aide de celles de f .

EXEMPLE N° 10 Un grand classique !

Pour $[f : (x, y) \mapsto f(x, y)]$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$, on pose $g(r, \theta) = f(r \cos \theta; r \sin \theta)$.

Prouver que g est C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et calculer les dérivées premières et secondes de g à l'aide des dérivées de f

EXEMPLE N° 11 Déterminer les fonctions réelles (définies sur $\mathbb{R}^2$ sauf pour Q9 où f définie sur $\mathbb{R} \times]0, +\infty[$) vérifiant:

$$\begin{aligned} 1) \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= 0 & 2) \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= x & 3) \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 2f(x, y) \\ 4) \nabla f(x, y) &= \begin{pmatrix} y^2 \\ 2xy + 1 \end{pmatrix} & 5) \nabla f(x, y) &= \begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix} & 6) \nabla f(x, y, z) &= \begin{pmatrix} 2zx + y^2 \\ 2xy + z^2 \\ 2yz + x^2 \end{pmatrix} \\ 7) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= 0 & 8) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= x + y & 9) 2y \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \end{aligned}$$

EXEMPLE N° 12 En utilisant le changement de variable proposé, résoudre sur l'ouvert $\mathcal{U}$ l'équation

$$\begin{aligned} 1. \quad x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} &= \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{de classe } C^1 \text{ sur } \mathcal{U} =]0, +\infty[\times \mathbb{R} \text{ en passant en coordonnées polaires} \\ 2. \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= 0 \quad \text{avec } f \text{ de classe } C^2 \text{ sur } \mathcal{U} = \mathbb{R}^2 \text{ en posant } \begin{cases} u = x - cy \\ v = x + cy \end{cases} \quad (\text{Équation des cordes vibrantes}) \end{aligned}$$

EXERCICES SUR LE CHAPITRE VIII

EXERCICE N° 1 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + xy) \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

1. Justifier la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$. (Question qui n'est pas un attendu du programme)

2. Montrer que f admet des dérivées partielles en $(0, 0)$ et les déterminer.

EXERCICE N° 1.5 Étudier l'existence des dérivées partielles de f lorsque $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^4 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

Donner un équivalent lorsque $x = 0$ de $f(x, x^2)$. Que peut-on conclure pour la fonction f ?

EXERCICE N° 2 Si $[f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}]$ est de classe C^1 , calculer les dérivées partielles de g à l'aide de celles de f lorsque

$$1) g(x, y) = f(xy, y^2) \quad 2) g(x, y) = xyf(xy, x + y) \quad 3) g(x, y) = f(f(x, x), x)$$

EXERCICE N° 3 Déterminer les fonctions solution de

$$\begin{aligned} 1. \quad 2 \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} &= xy \quad \text{avec } f \text{ de classe } C^1 \text{ sur } \mathcal{U} = \mathbb{R}^2 \text{ en posant } \begin{cases} u = x \\ v = x + 2y \end{cases} \\ 2. \quad x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= 0 \quad \text{avec } f \text{ de classe } C^2 \text{ sur } \mathcal{U} =]0, +\infty[^2 \text{ en posant } \begin{cases} u = xy \\ v = \frac{x}{y} \end{cases} \end{aligned}$$

EXERCICE N° 4 On considère une application f de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et on définit alors F par :

$$F(x, y) = \int_{-x}^y e^{x+t} f(2x+t) dt$$

1. Justifier que F est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ On pourra poser $u = 2x + t$

2. Trouver f pour que F soit solution de $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial F}{\partial x} - 4 \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + F = 1$