

EXEMPLE DU COURS SUR LE CHAPITRE VII

EXEMPLE N° 0.5 : Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2}$

EXEMPLE N° 1 On considère la fonction $\left[F : x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t} \right]$

1. Démontrer que F est définie et dérivable sur $]0, 1[$ et sur $]1, +\infty[$
2. Calculer $F'(x)$ et en déduire le sens de variation de F sur ces intervalles.
3. Déterminer la limite de F en $+\infty$. On pourra minorer $\frac{1}{\ln t}$ pour $t \in [x, x^2]$ lorsque $x > 1$.
4. Déterminer la limite de F en 0. On pourra encadrer $\frac{1}{\ln t}$ pour $t \in [x^2, x]$ lorsque $x \in]0, 1[$.
5. Déterminer les limites de $F(x)$ au voisinage de 1. On pourra remarquer que $\frac{1}{\ln t} = \frac{t}{t \ln t}$ et utiliser $\int_x^{x^2} \frac{dt}{t \ln t}$.

EXEMPLES DE RÉFÉRENCE :

- Existence et valeur éventuelle de : $\int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$ et $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$
- $\int_0^1 \ln(t) dt = -1$
- $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt$ converge $\Leftrightarrow \alpha > 0$ et alors $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt = \frac{1}{\alpha}$
- $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ converge $\Leftrightarrow \alpha > 1$ et alors : $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}$
- $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ converge $\Leftrightarrow \alpha < 1$ et alors : $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}$
- Convergence de $\int_0^1 \frac{\sin t}{t} dt$, $\int_0^1 t \ln t dt$ et $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$
- $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ converge mais $\left[f : t \mapsto \frac{\sin t}{t} \right]$ n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$

EXEMPLES (utilisation des critères) Dire si les intégrales suivantes sont convergentes ou divergentes
 $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{dt}{t^\pi}$, $\int_{-5}^{+\infty} e^{-\pi t} dt$, $\int_0^e \frac{dt}{t\sqrt{2}}$, $\int_0^{100} \frac{dt}{\sqrt{t}}$, $\int_0^e \ln(t) dt$, $\int_0^{+\infty} e^{\sqrt{3}t} dt$, $\int_{-1}^2 \frac{dt}{(t+1)^2}$, $\int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t}}$

EXEMPLE N° 2 Convergence et calcul de $\int_2^{+\infty} \frac{1+i(\ln t)}{t(\ln t)^3} dt$

EXEMPLE N° 3 Justifier l'existence et calculer $\int_6^{+\infty} \frac{dt}{t^2 - 8t + 15}$

EXEMPLE N° 4 Préciser la nature de 1) $\int_0^{+\infty} \frac{\text{Arctan } t}{1+t^2} dt$ 2) $\int_0^1 \frac{dt}{\sin t}$ 3) $\int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt$

SUITE EXEMPLE N° 4 Déterminer la valeur de $\int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt$ à l'aide d'une intégration par parties.

EXEMPLE N° 5 Justifier l'existence et calculer $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{(1+t)^2} dt$ à l'aide d'intégrations par parties.

EXEMPLE N° 6 À l'aide de changement de variable, justifier l'existence et calculer les intégrales
 1) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$ sachant que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ 2) $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}}$ en posant $t = \frac{1-x}{2}$

EXEMPLE N° 7 Justifier l'existence de $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2} dt$

SUITE EXEMPLE N° 5 Prouver l'existence puis calculer $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{(1+t)^2} dt$ cette fois en posant $t = \frac{1}{x}$

EXEMPLE N° 8 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n(t) = e^{-nt} - 2e^{-2nt}$ pour $t > 0$

Montrer que les deux expressions suivantes existent mais que leurs valeurs diffèrent :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} u_n(t) dt \right) \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t) \right) dt$$

EXEMPLE N° 9

1. Justifier l'existence de $\int_0^{+\infty} \frac{t}{\text{sh}(t)} dt$

2. Démontrer que, pour $t > 0$: $\sum_{n=0}^{+\infty} 2te^{-(2n+1)t} = \frac{t}{\text{sh}(t)}$

3. Prouver alors que : $\int_0^{+\infty} \frac{t}{\text{sh}(t)} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(2n+1)^2}$

4. En admettant que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$, préciser la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{t}{\text{sh}(t)} dt$

EXERCICES SUR LE CHAPITRE VII**EXERCICE N° 1** Établir la nature des intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^1 \frac{\operatorname{ch}(t) - \cos(t)}{t^{\frac{5}{2}}} dt \quad I_2 = \int_1^{+\infty} (\sqrt{1+t^2} - t) dt \quad I_3 = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^{\ln t}} \quad I_4 = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t(1+t^2)} dt$$

$$I_5 = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan}(x) \sin(x)}{x^2} dx, \quad I_6 = \int_0^1 \frac{dx}{x - \sqrt{x}}, \quad I_7 = \int_0^{+\infty} \sin(t) \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt, \quad I_8 = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha} dt \text{ où } \alpha \in]0, 1[$$

EXERCICE N° 2 Justifier l'existence et calculer les intégrales suivantes

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{\operatorname{ch} t}, \quad J = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{e^t + 1}} \quad (\text{Poser } u = \sqrt{e^t + 1}) \quad \text{et} \quad K = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} \sin(t) dt \text{ où } \alpha > 0$$

EXERCICE N° 3 Soient $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$. On pose $I(\alpha) = \int_0^1 t^\alpha \arctan(t) dt$ et $J(\beta) = \int_1^{+\infty} \frac{\arctan t}{t^\beta} dt$.

1. Étudier la convergence de $I(\alpha)$ et $J(\beta)$ suivant les valeurs de α et β .
2. Calculer $I(0)$ et $I(1)$.
3. Pour quelles valeurs de α l'expression $I(\alpha) + J(\alpha + 2)$ est-elle définie?
Dans ce cas, calculer $I(\alpha) + J(\alpha + 2)$ (utiliser un changement de variable). En déduire $J(2)$ et $J(3)$.

EXERCICE N° 4 On définit les intégrales $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t) dt$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos t) dt$

1. Justifier que I est convergente.
2. Prouver, à l'aide d'un changement de variables, que J est aussi convergente et que $I = J$.
3. Calculer $I + J$ et en déduire I et J .

EXERCICE N° 5 En utilisant le théorème d'intégration terme à terme, démontrer que, pour tout $x > 0$:

$$\int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$$

EXERCICE N° 6

1. Justifier l'existence de $\int_0^1 \frac{\operatorname{Arctan} t}{t} dt$. Ce nombre est appelé la constante de Catalan.
2. Démontrer que : $\int_0^1 \frac{\operatorname{Arctan} t}{t} dt = - \int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt$
3. Prouver que, pour $t \in]0, 1[$: $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{2n} \ln(t) = \frac{\ln t}{1+t^2}$
4. En déduire que $\int_0^1 \frac{\operatorname{Arctan} t}{t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$
5. En remarquant que la série est alternée, proposer une fonction Python Catalan d'argument un entier naturel p permettant de calculer une valeur approchée de la constante de Catalan à 10^{-p} près.