

EXEMPLE DU COURS SUR LE CHAPITRE VI

EXEMPLE N° 1 On note $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ dans $M_2(\mathbb{R})$

On définit l'application f qui à une matrice M de $M_2(\mathbb{R})$ associe $f(M) = AMB$.

Vérifier que f est un endomorphisme de $M_2(\mathbb{R})$ et préciser ses valeurs propres et ses espaces propres.

EXEMPLE N° 3/2 Soit l'endomorphisme f de $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ qui à la suite $u = (u_n)_{n \geq 0}$ associe la suite $v = (v_n)_{n \geq 0}$ telle que $\begin{cases} v_0 = u_0 \\ \forall n \geq 1, v_n = 2(u_n - u_{n-1}) \end{cases}$. Déterminer les éléments propres de f

SUITE EXEMPLE N° 1 Retrouver le spectre de f à l'aide du polynôme caractéristique.

EXEMPLES La matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable? Si oui la diagonaliser.

La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable? Si oui la diagonaliser.

La matrice de l'exercice n° 3/2 est-elle diagonalisable sur $M_4(\mathbb{R})$? sur $M_4(\mathbb{C})$?

EXEMPLE N° 2 Déterminer, suivant les valeurs du réel α , les valeurs propres et leurs multiplicités de

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \alpha \\ 1 + \alpha & -\alpha & -1 - \alpha \\ -\alpha & \alpha & 1 + \alpha \end{pmatrix}$$

SUITE EXEMPLE N° 2 Pour quelles valeurs du réel α , la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \alpha \\ 1 + \alpha & -\alpha & -1 - \alpha \\ -\alpha & \alpha & 1 + \alpha \end{pmatrix}$ est diagonalisable?

EXEMPLE N° 5/2

Déterminer, sans calculer de déterminant, le polynôme caractéristique de $A = \begin{pmatrix} n & 1 & \dots & 1 \\ 1 & n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & n \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$ où $n \in \mathbb{N}^*$

On pourra commencer par étudier le rang de $A - (n-1)I_n$

EXEMPLE N° 3 Réduire la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

EXEMPLE N° 4 Montrer que $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & -5 & -3 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ est semblable à $T = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & -3 \\ 0 & \beta & 1 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$ où α et β sont des réels.

EXEMPLE N° 5

Les matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables? Si oui, expliciter la relation de similitude.

Même question avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

EXEMPLE N° 6 Déterminer l'expression des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = -4u_n - 6v_n \\ v_{n+1} = 3u_n + 5v_n \end{cases} \text{ avec } \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

SUITE EXEMPLE N° 4 Calculer les puissances itérées de A où $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

EXERCICES SUR LE CHAPITRE VI

EXERCICE N° 1/4 Soit $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et D l'endomorphisme de E qui à $f \in E$ associe la fonction f' .

1. Calculer $D(f_0)$ où $f_0 = [x \mapsto 1]$ et en déduire que 0 est valeur propre de D . Déterminer l'espace propre associé 0.
2. Calculer $D(f_1)$ où $f_1 = [x \mapsto e^x]$ est la fonction exponentielle. Qu'en déduire pour le spectre de D ?
3. Déterminer tous les éléments propres de D

EXERCICE N° 1/2 Donner les valeurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & -3 \\ -3 & 0 & -1 & -2 \\ -2 & -3 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

EXERCICE N° 1 Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables ? Si oui, les diagonaliser.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -4 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 6 & 7 & -6 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Pour C , montrer (sans calcul ou presque) que 0 est valeur propre et que $\begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix}$ est vecteur propre où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$

EXERCICE N° 2 On considère l'application ϕ définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ ($n \in \mathbb{N}^*$) par: $\phi(P) = nXP - (X^2 - 1)P'$

1. Justifier que ϕ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$
2. Démontrer que $\mathcal{B} = (1, X-1, (X-1)^2, \dots, (X-1)^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$
3. Déterminer la matrice de ϕ dans cette base.
4. L'application ϕ est-elle diagonalisable ?

EXERCICE N° 3 Soient $n \geq 2$ et $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $\text{tr}(A) \neq 0$. On définit : $\Phi : M \in M_n(\mathbb{R}) \mapsto \text{tr}(A)M - \text{tr}(M)A$

1. Montrer que Φ est un endomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$ et déterminer ses éléments propres.
2. L'endomorphisme Φ est-il diagonalisable ?

EXERCICE N° 4 Soient $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$ et $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in M_n(\mathbb{R})$ telle que :
 $a_{k,1} = a_{1,k} = 1$ pour $k \geq 2$ et les autres coefficients sont nuls

1. Déterminer le rang de A . Que peut-on en déduire sur le spectre de A ?
2. Calculer A^3 en fonction de A . Que peut-on en déduire sur le spectre de A ?
3. Déterminer le polynôme caractéristique de A sans aucun calcul de déterminant.
4. La matrice A est-elle diagonalisable ?

EXERCICE N° 5 Exprimer le terme général des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par

$$\begin{cases} u_0 = -2 \\ v_0 = 0 \\ w_0 = 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = 3u_n - 3v_n + 2w_n \\ v_{n+1} = -u_n + 5v_n - 2w_n \\ w_{n+1} = -u_n + 3v_n \end{cases}$$

On pourra rechercher une relation matricielle du type $X_{n+1} = AX_n$ et réduire A .

EXERCICE N° 6 On considère un système différentiel (S) :
$$\begin{cases} x' = 5x - 2y - z \\ y' = 2x + y - z \\ z' = x - y + 2z \end{cases} \quad \text{où } x, y, z \text{ sont des fonctions in-}$$
connues de la variable réelle t supposées dérivables sur $\mathbb{R}$ qu'on écrit, à l'aide d'une matrice, sous la forme :

1. La matrice A est-elle diagonalisable? $X' = AX$ où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
2. Montrer que A est semblable à une matrice $T = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 1 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$ avec α et β des réel à préciser.

Préciser la matrice de passage P (il n'est pas nécessaire d'explicitier P^{-1})

3. Résoudre le système différentiel $Y' = TY$ d'inconnue $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ où a, b, c sont des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$
4. En déduire l'ensemble des solutions de (S) en utilisant le changement de bases : $X = PY$.
Puisque P est une matrice à coefficients constants, on pourra admettre que $Y' = (PX)' = PX'$

EXERCICE N° 7 Racine carrée et commutant d'une matrice diagonalisable

1. *Un peu de théorie:* Soient f et g des endomorphismes d'un espace E de dimension finie qui commutent, prouver que les sous-espaces propres de f sont stables par g .
2. Montrer que $A = \begin{pmatrix} 11 & -5 & -5 \\ -5 & 3 & 3 \\ -5 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ est diagonalisable à valeurs propres simples.
- Préciser la matrice de passage P et la matrice D réduite associée.
3. On recherche les matrices B de $M_3(\mathbb{R})$ telles que $B^2 = A$.
On note f et g les endomorphismes canoniquement associés à A et B .
- Démontrer que f et g commutent
 - Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de diagonalisation de A , préciser la forme de la matrice de g dans cette base.
 - En déduire toutes les matrices B répondant à la question.
4. Démontrer que l'ensemble des matrices qui commutent avec A est un espace vectoriel de dimension 3.
5. On considère désormais $A_1 = PD_1P^{-1}$ où D_1 est la matrice diagonale $D_1 = \text{diag}(0, 1, 1)$.
On cherche les matrices B_1 de $M_3(\mathbb{R})$ telle que: $B_1A_1 = A_1B_1$
On note f_1 et g_1 les endomorphismes associés à A_1 et B_1 . On a donc: $f_1 \circ g_1 = g_1 \circ f_1$
- Justifier que $P^{-1}B_1P = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}$ où $(m, a, b, c, d) \in \mathbb{R}^5$
 - En déduire que l'ensemble des matrices qui commutent avec A_1 est un espace vectoriel de dimension 5.

EXERCICE N° 8 Soit un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension 3 avec: $\begin{cases} f^2 = f^3 & (i) \\ \dim \text{Ker}(f - id_E) = 1 & (ii) \end{cases}$

- En utilisant la relation (i), démontrer que les valeurs propres de f valent 0 ou 1
- Démontrer que f n'est pas bijective.
- En déduire les valeurs propres de f
- Justifier que f^2 est un projecteur
- Montrer que $\text{Ker}(f - id_E) = \text{Ker}(f^2 - id_E)$
- Préciser alors le polynôme caractéristique de f . On pourra utiliser la trace
- Justifier que $\text{Ker } f^2$ est stable par f .

En déduire qu'il existe une base de E où la matrice de f est de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$