

EXEMPLE DU COURS SUR LE CHAPITRE V

EXEMPLE N° 1 a et b sont des paramètres réels avec $ab \neq 0$

1. Donner un point et un vecteur directeur de la droite $\Delta : ax - a^2y - a + a^2 = 0$
2. Donner le centre et le rayon du cercle $\mathcal{C} : x^2 + y^2 + 2a(y - x) - 2b(x + y) + a^2 + b^2 = 0$
3. Donner une équation cartésienne de la parallèle Δ' à Δ issue de $P(a, b)$ en utilisant:
 - a) un déterminant
 - b) un produit scalaire
4. Donner une équation cartésienne de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}$ au point $P(a, b)$ sans utiliser ni produit scalaire, ni déterminant.

EXEMPLE N° 2 Reconnaître et esquisser les courbes données par la représentation:

$$\begin{array}{lll}
 \underline{1)} \quad 3x^2 + 4y^2 + 6x - 9 = 0 & \underline{2)} \quad x^2 - 2x - 2y - 3 = 0 & \underline{3)} \quad x^2 - 3y^2 - 4y = 1 \\
 \underline{4)} \quad y^2 - 4y - 4x^2 = 0 & \underline{5)} \quad y^2 + 4y + 4x^2 = 0 & \underline{5.5)} \quad 2x^2 - y^2 + 4x - 4y - 1 = 0 \\
 \underline{6)} \quad \begin{cases} x(t) = 2 + 2 \operatorname{ch} t \\ y(t) = 3 \operatorname{sh} t \end{cases} & \underline{7)} \quad \begin{cases} x(t) = 2 - \sin t \\ y(t) = -1 + 4 \cos t \end{cases}
 \end{array}$$

Préciser le centre, les axes de symétries, les sommets et, si c'est une hyperbole, les asymptotes.

EXEMPLE N° 3 a et b sont des nombres réels avec $ab \neq 0$.

1. Retrouver avec un gradient une équation cartésienne, vu dans l'exemple 1, de la tangente $\mathcal{T}$ en $P(a, b)$ au cercle $\mathcal{C} : x^2 + y^2 + 2a(y - x) - 2b(x + y) + a^2 + b^2 = 0$
2. Déterminer la tangente au point $M_0(-\frac{1}{3}, 3)$ de l'hyperbole $\mathcal{H}$ de sommets $A(1, -1)$ et $A'(5, -1)$ qui admet pour asymptote une droite parallèle à la droite $\Delta : 3x - 2y = 0$
 - a. en utilisant une équation cartésienne de $\mathcal{H}$
 - b. en utilisant une représentation paramétrique de $\mathcal{H}$

EXEMPLE N° 4 Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan, déterminer l'enveloppe de la famille de droites $(\mathcal{D}_t)_{t \in \mathbb{R}}$ où $\mathcal{D}_t : (1 - t^2)x + 2ty = 1 + t^2$

EXEMPLE N° 5 Donner la longueur

- d'un cercle de rayon R ?
- de la courbe représentative de la fonction ch pour $x \in [-1, 1]$?
- d'un arche de cycloïde de représentation : $\begin{cases} x(t) = t - \sin t \\ y(t) = 1 - \cos t \end{cases} ?$

EXEMPLE N° 6 On veut déterminer, de 2 façons, la courbure aux points réguliers de la cardioïde Γ donnée par

$$f(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 + \cos t) \cos t \\ (1 + \cos t) \sin t \end{pmatrix}$$

1. Pourquoi peut-on concentrer l'étude de la cardioïde pour $t \in [0, \pi]$?
2. Déterminer le premier vecteur de Frenet aux points réguliers pour les paramètres $t \in [0, \pi]$.
3. Démontrer que, pour t réel: $\cos t + \cos(2t) = 2 \cos \frac{t}{2} \cos \frac{3t}{2}$
Proposer une factorisation analogue pour $\sin t + \sin(2t)$
4. Déterminer la courbure en utilisant les formules de Frenet.
5. Déterminer γ en utilisant un relèvement de $\vec{T}$ sous la forme $\vec{T} = \begin{pmatrix} \cos \alpha(t) \\ \sin \alpha(t) \end{pmatrix}$
6. Déterminer la développée de Γ .

EXEMPLE N° 7 Déterminer de deux façons la développée de la parabole $y = \frac{x^2}{2}$

EXERCICES SUR LE CHAPITRE V

EXERCICE N° 1 Étant donné un paramètre réel m , on considère $\mathcal{C}_m : x^2 + y^2 - 4mx - 2my + \frac{9m^2}{2} - m - \frac{1}{2} = 0$

1. Si $m \neq -1$, montrer que $\mathcal{C}_m$ est un cercle et préciser son centre I_m et son rayon R_m . Que dire de $\mathcal{C}_{-1}$?
2. Justifier que les centres de ces cercles sont situés sur une droite Δ dont on donnera une équation cartésienne.
3. Justifier que $I(-2, -1)$ est extérieur au cercle $\mathcal{C}_0$ et déterminer une équation cartésienne des deux tangentes Δ_1 et Δ_2 à $\mathcal{C}_0$ issues de I .
4. Prouver que Δ_1 et Δ_2 sont des tangentes communes tous les cercles $\mathcal{C}_m$ pour $m \neq -1$.

EXERCICE N° 2 Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé du plan, on considère la droite $\Delta : x = -4$ et le point F de coordonnées $(2, 0)$. Déterminer une équation réduite et esquisser la conique $\mathcal{C}$ de foyer F , de directrice $\mathcal{D}$ et d'excentricité $e = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Même question avec $e = \sqrt{2}$.

EXERCICE N° 3 Reconnaître l'enveloppe de la famille de droites $(A_t B_t)$ où $A_t = (a \cos(t), 0)$ et $B_t = (0, a \sin(t))$ autrement dit A_t est sur l'axe des abscisses, B_t sur l'axe des ordonnées et $A_t B_t = a > 0$ est fixe.

EXERCICE 3.5 Soit F un point du plan à l'intérieur du cercle trigonométrique mais qui n'est pas sur le cercle, déterminer l'enveloppe des médiatrices $[MF]$ lorsque M décrit le cercle trigonométrique.

EXERCICE N° 4 Quelle est la longueur de la courbe représentative de la fonction $\exp$ pour $x \in [0, \ln 2]$?
Poser $u = \sqrt{1 + e^{2t}}$

EXERCICE N° 5 On considère la courbe $\Gamma : \begin{cases} x(t) = 2 \operatorname{ch}(t) \\ y(t) = 3 \operatorname{sh}(t) \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

1. Reconnaître la courbe Γ et proposer en une esquisse sans aucune étude supplémentaire.
2. Déterminer le repère de Frenet au point de paramètre $M(t)$ de la courbe Γ
3. Justifier que le rayon de courbure $R(t)$ au point $M(t)$ de la courbe Γ est $R(t) = -\frac{1}{6}(9 + 13 \operatorname{sh}^2 t)^{\frac{3}{2}}$
4. Déterminer enfin la développée de Γ .

EXERCICE N° 6 On cherche la développée de la cycloïde paramétrée par $f(t) = \begin{pmatrix} t - \sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix}, t \in]0, \pi[$

1. On note $\vec{T}$ le premier vecteur de Frenet. Montrer que $\vec{T} = \begin{pmatrix} \sin \frac{t}{2} \\ \cos \frac{t}{2} \end{pmatrix}$
2. Déterminer alors le rayon de courbure.
3. Déterminer la développée
4. Retrouver la développée sans utiliser le rayon de courbure.
5. En utilisant un changement de paramétrage, montrer que cette développée est encore une cycloïde.

EXERCICE N° 7 On considère la courbe paramétrée $\Gamma : \begin{cases} x = 2t^3 + 3t^2 \\ y = 3t^2 + 6t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

1. Déterminer l'unique réel a solution de $\operatorname{sh} x = -1$ dans $\mathbb{R}$. Calculer alors $\int_{-1}^0 \sqrt{1 + t^2} dt$ en posant $t = \operatorname{sh}(u)$
2. Calculer la longueur ℓ de la portion de courbe entre A et O où A est le point de rebroussement de la courbe.
3. Si $M(t)$ le point de paramètre $t \neq -1$ de la courbe Γ , justifier que $\vec{n}(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ t \end{pmatrix}$ dirige la normale en $M(t)$ à Γ .
4. Déterminer l'enveloppe des droites $\Delta_t = M(t) + \operatorname{Vect}(\vec{n}(t))$ où $t \in \mathbb{R} - \{-1\}$.
Que représente cette enveloppe pour la courbe Γ ?