

EXEMPLE DU COURS SUR LE CHAPITRE III**EXEMPLES DU COURS**

1. Identifier les séries télescopiques suivantes : a) $\sum \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ b) $\sum \frac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$
2. Identifier les séries de référence ci-dessous et préciser leur nature
a) $\sum \frac{1}{n^\pi}$ b) $\sum \frac{1}{\pi^n}$ c) $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ d) $\sum \frac{1}{3^{2n}}$ e) $\sum \frac{(-1)^n}{2^{2n+1}}$ f) $\sum \frac{1}{n^2 \sqrt{n}}$
3. Préciser la nature de $\sum u_n$, $\sum v_n$ et $\sum (u_n + v_n)$ lorsque
a) $u_n = (-1)^n$ et $v_n = (-1)^{n+1}$ b) $u_n = 3^n$ et $v_n = 2^n$
4. Préciser la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2 + \ln n}$
5. Préciser la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n + (-1)^n \operatorname{Arcsin}(n^{-205})}$

EXEMPLE N° 2 Déterminer la nature de la série de terme général

$$1) u_n = \frac{1}{e^n + (-1)^n \sqrt{n}} \quad 2) u_n = \cos \frac{1}{\sqrt{n}} - \operatorname{ch} \frac{1}{\sqrt{n}} \quad 3) u_n = \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}} \quad 4) u_n = \ln \left(\frac{n^2 + n + 1}{n^2 + n - 1} \right) \quad 5) u_n = \left(\operatorname{ch} \frac{1}{n} \right)^{-n^3}$$

EXEMPLE N° 3 Justifier l'existence et calculer la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ où $u_n = \frac{1}{n^2 + 3n + 2} + \frac{e^{n-1}}{3^{n+1}}$ **CONTRE-EXEMPLE** $\text{CV} \not\Rightarrow \text{CVA}$ Convergence et calcul de la somme pour la série harmonique alternée $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ **EXEMPLE N° 4** Préciser la nature des séries 1) $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{(n+1)\sqrt{n}}$ 2) $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin n}{n^2 + \operatorname{Arctan} n}$ 3) $u_n = n^{100} e^{-n^2}$ **EXEMPLE N° 5** Déterminer la nature des séries $\sum \frac{\ln n}{n^\alpha}$ où α est un réel strictement positif distinct de 1 fixé.**EXEMPLES DE CALCULS DE SOMMES** $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$, $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n-k} k!}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ où $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^{n-k} k!}$ **EXEMPLE DU COURS** Nature de la série $\sum u_n$ où a) $u_n = \frac{2^n \sqrt{n}}{(2n)!}$ b) $u_n = \frac{(3n)!}{52n+1}$ **EXEMPLE DU COURS** Preuve, par comparaison série/intégrale, du critère de Riemann : $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge $\Leftrightarrow \alpha > 1$ **EXEMPLE N° 6** Étudier la nature de la série $\sum \frac{\ln n}{n}$ à l'aide d'une comparaison série/intégrale.
Proposer un équivalent de la somme partielle.**EXEMPLE** Les séries de Riemann alternée $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ convergent seulement si $\alpha > 0$ (avec CVA si $\alpha > 1$)**EXEMPLE N° 7** Démontrer que la série $\sum (-1)^n \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$ converge sans converger absolument**CONTRE-EXEMPLE** « (u_n) DÉCROISSANTE DANS TSA » « SIGNE DANS CRITÈRE D'ÉQUIVALENCE »Prouver que la série $\sum \frac{(-1)^k}{\sqrt{k} + (-1)^k}$ est alternée avec un terme général qui tend vers 0 mais qu'elle ne converge pas.

EXERCICES SUR LE CHAPITRE III

EXERCICE N° 1

- Justifier l'existence de $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ où $u_n = \operatorname{Arctan} \frac{2n}{n^4 + n^2 + 2}$
- Prouver que, pour $x > 0$ et $y > 0$ alors: $\operatorname{Arctan} x - \operatorname{Arctan} y = \operatorname{Arctan} \frac{x-y}{1+xy}$
- Développer $(n^2 + n + 1)(n^2 - n + 1)$ et $(n+1)^2 - (n+1) + 1$
- Calculer alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$

EXERCICE N° 3/2 On considère la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ avec $u_0 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$

- Prouver que, pour tout n entier naturel, $u_n > 0$
- Prouver que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.
- Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln u_n = -\sum_{k=0}^{n-1} u_k$. Conclure sur la nature de la série $\sum u_n$

EXERCICE N° 2

- Étudier la nature de la série $\sum u_n$ où: 1) $u_n = \frac{\ln n}{\sqrt{n}} x^n$ où $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$ 2) $u_n = \frac{(n+i)^2}{(3n)!}$
- 3) $u_n = e^n \frac{n!}{n^{2n}}$ 4) $u_n = \frac{(-1)^n \sin \frac{1}{n}}{\sqrt{n} + 2 \cos n}$ (Indication: $|\sin x| \leq |x|$) 5) $u_n = \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{1+2+\dots+n} \right)$

EXERCICE N° 3

Justifier l'existence et calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ où:

- 1) $u_n = \frac{1}{4n^2 - 1}$ 2) $u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} - \frac{2}{n+3}$ 3) $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{e^k (n-k)!}$ 4) $u_0 = 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{e^k (n-k)!}$

EXERCICE N° 4

L'objectif de l'exercice est de calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} n x^n$ où $|x| < 1$

- Justifier l'existence de la somme.
- Pour $|x| < 1$, calculer de deux façons $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right)^2$. Conclure.
- Pour $|x| < 1$ et $N \in \mathbb{N}$, que vaut $\sum_{n=0}^N x^n$? En déduire la valeur de $\sum_{n=0}^N n x^n$. Conclure.

EXERCICE N° 5

Étudier suivant les valeurs du paramètre réel a la nature de la série $\sum u_n$ où $u_n = \left(n \operatorname{sh} \frac{1}{n} \right)^{-n^a}$

On pourra chercher un équivalent de $\ln u_n$ en partant d'un DL₃ de $\operatorname{sh} x$

EXERCICE N° 6

Pour tout entier $n \geq 2$, on pose $u_n = \frac{1}{n \ln n}$

- On introduit $f = \left[t \mapsto \frac{1}{t \ln t} \right]$. Justifier que, pour $n \geq 2$: $f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(t) dt \leq f(n)$
- En déduire une minoration de la somme partielle d'ordre n de la série $\sum_{n \geq 2} u_n$ par le réel $\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln 2)$.
- Quelle est la nature de la série $\sum_{n \geq 2} u_n$?
- On considère maintenant la suite (a_n) avec $a_n = \sum_{k=2}^n u_k - \ln(\ln n)$.
 - Démontrer que: $\forall n \geq 2, f(n+1) - f(n) \leq a_{n+1} - a_n \leq 0$ On pourra réutiliser la question 1
 - Quelle est la nature de la série $\sum_{n \geq 2} (f(n+1) - f(n))$?
 - Justifier alors que la suite $(a_n)_{n \geq 2}$ converge
 - En déduire que $\sum_{k=2}^n u_k \sim_{n \rightarrow +\infty} \ln(\ln n)$

EXERCICE N° 7

Étudier la nature de la série $\sum u_n$ où $u_n = \ln \left(\frac{2n + (-1)^n}{2n} \right)$