

EXEMPLE DU COURS SUR LE CHAPITRE II

EXEMPLE N° 1 Dans $\mathbb{R}^4$, on considère F le sev défini par les équations $\begin{cases} x + y = 0 \\ x - t = 0 \end{cases}$ et $G = \text{Vect}((1, 1, 0, 0), (0, 0, -1, 1))$.

Démontrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$

EXEMPLE N° 2 On se donne un polynôme Q de $\mathbb{K}[X]$ de degré $n + 1$ où $n \in \mathbb{N}$ fixé.

On définit alors $S_Q = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid Q \text{ divise } P\}$. Démontrer que S_Q est un supplémentaire de $\mathbb{K}_n[X]$ dans $\mathbb{K}[X]$

EXEMPLE N° 3 On considère l'espace vectoriel réel $E = C^0([-1, 1], \mathbb{R})$ et les sous-ensembles suivants:

- F l'ensemble des fonctions constantes de E
- G l'ensemble des fonctions de E nulles sur $[-1, 0]$
- H l'ensemble des fonctions de E nulles sur $[0, 1]$

Démontrer que $E = F \oplus G \oplus H$

EXEMPLE N° 4 On considère φ défini sur $\mathbb{R}[X]$ par $\varphi(P) = X^2 P' - (2X + 1)P$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $E = \mathbb{R}[X]$
2. Justifier que $F = \mathbb{R}_2[X]$ est stable par φ . On note $\tilde{\varphi}$ l'endomorphisme induit.
3. Donner la matrice de $\tilde{\varphi}$ dans la base canonique de F

EXEMPLE N° 4.5 Les sous-espace suivant sont-ils des hyperplans? Si oui, préciser la dimension.

- $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2y - t = 0\}$
- $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z^2\}$
- $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 1 + y + z\}$
- F est l'ensemble des matrices de $M_3(\mathbb{R})$ pour lesquelles la somme des coefficients de la première ligne est nulle.

EXEMPLE N° 5 Justifier, sans calcul, que F et G sont des espaces vectoriels et préciser la dimension lorsque:

$$F = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mid x_1 = x_n\} \quad \text{et} \quad G = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid \int_0^1 P(t) dt = 0\}$$

EXEMPLE N° 6 On définit H comme l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ dont la somme des coefficients est nulle. Justifier que H est un hyperplan de $M_n(\mathbb{R})$ et préciser une base de H

EXEMPLE N° 7 On donne $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$. Calculer $\text{tr}(A)$, $\text{tr}(B)$, $\text{tr}(AB)$ et $\text{tr}(BA)$

EXEMPLE N° 8 Justifier $F = \{M \in M_n(\mathbb{K}) \mid \text{tr}(M) = 0\}$ est un sev de $M_n(\mathbb{K})$ dont on précisera la dimension

EXEMPLE N° 9 Pour $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$, justifier que $E = \{M \in M_n(\mathbb{R}) \mid M - M^T = \text{tr}(M)I_n\}$ est un espace vectoriel et préciser sa dimension.

EXEMPLE N° 10 Calculer $\det \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & -3 \end{pmatrix}$

EXEMPLE 10.5 Calcul d'un déterminant tri-bandes d'ordre n

$$\text{Calculer, pour tout entier naturel } n \text{ non nul, la valeur du déterminant d'ordre } n : D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -2 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

EXEMPLE N° 11 *Diverses utilisations des déterminants*

1. Dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne $A(-2, 1, 1)$, $B(2, 2, -1)$ et $C(4, 0, 3)$. En admettant que c'est le sixième du volume du parallélépipède construit sur $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ et $\vec{OC}$, calculer le volume du tétraèdre OABC.
2. Les vecteurs suivants sont-ils linéairement indépendants ?
 - a. $P = 1 + X + X^2$, $Q = -1 + 2X - X^2$ et $R = -1 + 8X - X^2$ dans $\mathbb{R}[X]$.
 - b. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ dans $M_2(\mathbb{R})$.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur le scalaire a pour que $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ soit inversible.
4. Avec les notations de la question 2, donner une équation de l'hyperplan dans la base canonique adaptée:
 - a) $H = \text{Vect}(P, Q)$ dans $\mathbb{R}_2[X]$
 - b) $H = \text{Vect}(A, B, C)$ dans $M_2(\mathbb{R})$

EXEMPLE N° 12 Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$, les matrices suivantes sont-elles semblables à A ?

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Comparer } \text{rg}(A_3 - I_3) \text{ et } \text{rg}(A - I_3)$$

EXEMPLE N° 13 On définit f sur $\mathbb{R}_n[X]$ par: $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], f(P) = X^2 P'' + P(-1)$. Justifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et calculer sa trace et son déterminant.**EXERCICES SUR LE CHAPITRE II****EXERCICE 0.25** Dans $\mathbb{R}^4$, on définit: $F = \text{Vect}((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0))$, $G = \text{Vect}((0, 0, 1, 0))$ et $H = \text{Vect}((0, 0, 0, 1))$. Justifier que $F \oplus G \oplus H = \mathbb{R}^4$ **EXERCICE 0.5** Dans $\mathbb{R}[X]$, on définit: $F = \text{Vect}(1 + X)$, $G = \text{Vect}(X + X^2)$ et $H = \text{Vect}(1 - X^2)$

1. Donner la dimension de chacun des sous-espace vectoriel.
2. Vérifier que $F \cap G = \{0\}$. Que vaut $F \cap G \cap H$? On admettra que $G \cap H = \{0\}$ et $F \cap G = \{0\}$
3. En remarquant que $(1 + X) - (X + X^2) = 1 - X^2$, en déduire que la somme $F + G + H$ n'est pas directe.
4. Donner une famille base de $F + G + H$ et en déduire sa dimension.

EXERCICE 0.75 Dans $M_3(\mathbb{R})$, on considère :

D le sous-espace vectoriel des matrices diagonales

T le sous espace vectoriel des matrice triangulaire supérieures (matrice avec des coefficients non nuls au dessus ou sur la diagonale)

S le sous-espace vectoriel des matrices triangulaire supérieures strictes (matrice avec des coefficients non nul uniquement strictement au dessus de la diagonale)

I le sous-espace vectoriel des matrices triangulaires inférieures strictes (matrice avec des coefficients non nul uniquement strictement en dessous de la diagonale)

1. En utilisant des sous-familles de la base canonique de $M_3(\mathbb{R})$, donner des bases des espaces D, T, S et I. En déduire leurs dimensions.
2. La somme $D + T + S$ est-elle être directe? On pourra utiliser les dimensions.
3. Vérifier que $D + S + I$ est directe.
4. A-t-on $D \oplus S \oplus I = M_3(\mathbb{R})$?

EXERCICE N° 1 On considère l'espace vectoriel $E = C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et on considère les sous-ensembles:

- F constitué des fonctions de E 1 périodique
- G constitué des fonctions de E qui sont nulles sauf sur un segment
- H constitué des fonctions polynômiales qui s'annule en 0

Démontrer que F , G et H sont des sev de E qui sont en somme directe

EXERCICE N° 2 Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

1. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on considère le sev $E_\lambda = \text{Ker}(f - \lambda id)$ où id est l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$
Prouver que E_λ est un sev de $\mathbb{R}^3$ qui est stable par f .
2. Déterminer une base des sev E_1, E_2 et E_{-4}
3. Prouver que E_1, E_2 et E_{-4} sont en somme directe
4. En déduire que $\mathbb{R}^3 = E_1 \oplus E_2 \oplus E_{-4}$
5. Déterminer une base adaptée à cette décomposition et donner la matrice de f dans cette base.

EXERCICE N° 3 Soit u un endomorphisme de $E = \mathbb{R}^n$ avec $\text{rg}(u) = \text{rg}(u^2)$

1. Montrer que: $\text{ker } u^2 = \text{ker } u$
2. En déduire que $\text{ker } u$ et $\text{Im } u$ sont supplémentaires.
3. Étudier les réciproques.

EXERCICE N° 4 On considère trois réels a, b et c et on pose $\vec{u} = (1, 1, 1)$, $\vec{v} = (a, b, c)$ et $\vec{w} = (bc, ca, ab)$
Donner une condition nécessaire et suffisante pour $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ soit une base de $\mathbb{R}^3$

EXERCICE N° 5 Calculer les déterminant d'ordre $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$ suivants:

$$1) D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad 2) D_n = \begin{vmatrix} 1 & n & \dots & \dots & n \\ n & 2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & n \\ n & \dots & \dots & n & n \end{vmatrix} \quad 3) D_n(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & x & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & x & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & x \end{vmatrix}$$

EXERCICE N° 6 Soient a et b des réels avec $(a, b) \neq (0, 0)$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, on pose:

$$a_{ii} = a + b, \quad a_{ij} = ab \text{ si } j = i + 1 \quad a_{ij} = 1 \text{ si } i = j + 1 \text{ et } a_{ij} = 0 \text{ sinon}$$

On note $D_n = \det(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$. Chercher une relation de récurrence entre D_n , D_{n-1} et D_{n-2} pour $n \geq 3$

En déduire D_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

EXERCICE N° 7 Pour a, b et c des paramètres réels, on définit l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ par:

$$f(x, y, z) = (ax + ay + az, ax + by + bz, ax + by + cz)$$

Donner la matrice A canoniquement associée à f et en déduire une condition nécessaire et suffisante pour que f soit un automorphisme.