

EXEMPLE DU COURS SUR LE CHAPITRE XIII

EXEMPLE N° 0 : Justifier que les applications suivantes sont dérivables et calculer la dérivée lorsque c'est possible

$$F(x) = \int_0^{x^2} e^{-t^2} dt \quad \text{et} \quad G(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$$

EXEMPLE N° 1 On considère les intégrales à paramètre suivante

$$\mathbf{1.} \quad F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-xt^2}}{t^2} dt \quad \mathbf{2.} \quad \hat{\varphi}(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} \varphi(t) dt \quad \text{où } \varphi = [x \mapsto e^{-x^2}] \quad \mathbf{3.} \quad G(a) = \int_0^{\pi} \sin(a \sin x) dx$$

I. Préciser, dans chaque cas, le paramètre d'une part, l'expression et l'intervalle d'intégration d'autre part.

II. Donner le domaine de définition de la fonction définie par l'intégrale à paramètre dans chacun des cas.

III. Étudier la continuité de la fonction définie par l'intégrale à paramètre

sur $\mathbb{R}$ pour les cas 2. et 3. et sur $[0, +\infty[$ pour le cas 1. en dominant d'abord sur $[0, A]$ où $A > 0$

IV. Étudier la dérivabilité de la fonction définie par l'intégrale à paramètre

sur $\mathbb{R}$ pour les cas 2. et 3. et sur $]0, +\infty[$ pour le cas 1. en dominant d'abord sur $[a, +\infty[$ où $a > 0$

V. On rappelle que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$. Déduire alors de ce qui précède la valeur de :

a. la limite $\lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a} \int_0^{\pi} \sin(a \sin x) dx$

b. l'expression de $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-xt^2}}{t^2} dt$ en fonction de x sans le symbole intégrale lorsqu'elle existe.

On pourra utiliser un changement de variables pour calculer $F'(x)$

c. l'expression de $\hat{\varphi}(x)$ en fonction de x sans le symbole intégrale lorsqu'elle existe.

On pourra réaliser une intégration par parties pour trouver un problème de Cauchy vérifiée par $\hat{\varphi}$

EXEMPLE N° 2 Étudier la continuité de $\left[F : x \mapsto \int_0^{+\infty} x e^{-xt} dt \right]$ sur $[0, +\infty[$

EXERCICES SUR LE CHAPITRE XIII**EXERCICE N° 1** *Fonction Gamma*

On définit la fonction Γ de la variable réelle x par : $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$

1. Prouver que la fonction Γ est définie et continue sur $]0, +\infty[$ (On pourra dominer sur $[a, b]$ avec $0 < a < b$)
2. En utilisant une intégration par partie, établir que, pour $x > 0$: $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
En déduire la valeur de $\Gamma(n+1)$ pour $n \in \mathbb{N}$ de sorte que Γ permet un prolongement la notation $n!$ de $\mathbb{N}$ à $]0, +\infty[$
3. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$, en utilisant les résultats précédents, calculer, en fonction de n et x , l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-xt} t^n dt$ (Transformée de Laplace de la fonction $[t \mapsto t^n]$)

EXERCICE N° 2 Justifier l'existence pour tout x réel et calculer $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} \sin(xt)}{t} dt$ **EXERCICE N° 3** On considère la fonction F de la variable réelle x définie par l'expression $F(x) = \int_0^1 \text{Arctan}(xt) dt$

1. Montrer que F est une application de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
2. Vérifier que F vérifie sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) : $xy' + y = \text{Arctan } x$
3. Déterminer, à l'aide de F , l'expression d'une solution de l'équation (E) sur $]0, +\infty[$ et sur $] -\infty, 0[$.
En déduire que F est l'unique solution sur $\mathbb{R}$ de (E).
4. Justifier de deux façons que F est développable en série entière et préciser le développement et le rayon de convergence.

EXERCICE N° 4 On considère les fonctions f et g de la variable réelle x d'expression

$$f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \ln t dt \quad \text{et} \quad g(x) = \int_0^{+\infty} t e^{-xt} \ln t dt$$

On pourra remarquer que f est la transformée de Laplace de la fonction logarithme

1. Donner le domaine de définition des fonctions f et g .
2. Étudier la dérivabilité de f sur son domaine de définition. On pourra travailler localement.
3. Calculer $xf'(x) + f(x) + \frac{1}{x}$ là où c'est possible.
4. En déduire l'expression de $f(x)$ sans symbole intégrale qu'on exprimera en fonction de la constante $f(1)$.

EXERCICE N° 5 On définit la fonction F de la variable réelle x par : $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+tx} dt$

1. Montrer que F est définie et continue sur $[0, +\infty[$.
2. Montrer que F est de classe C^∞ sur $[0, +\infty[$
3. En déduire que F admet un développement limité en 0 à tout ordre qu'on déterminera.