

**EXEMPLE DU COURS SUR LE CHAPITRE XII****EXEMPLE N° 1** (D'après oral maths 2)

On dispose de deux urnes. L'urne  $\mathcal{U}_1$  contient 4 boules noires et 2 boules blanches. L'urne  $\mathcal{U}_2$  contient 2 boules noires et 4 boules blanches. On choisit une urne au hasard et on tire successivement 3 boules avec remise dans cette urne. Sachant que les 2 premières boules sont noires, quelle est la probabilité que la 3ème le soit aussi?

**EXEMPLE N° 2** On lance un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On considère les événements :

A : « on obtient 3 ou 6 »    et    B : « on obtient un multiple de 2 »

1. On suppose le dé bien équilibré. Les événements A et B sont-ils indépendants?
2. Même question sachant que le dé est truqué : le 6 apparaît avec une proba  $\frac{1}{2}$  et les autres faces sont équiprobables.

**EXEMPLE N° 3** On lance deux fois de suite un dé à 6 faces bien équilibré. On définit les événements :

A : « le premier lancer amène un chiffre pair »;    B : « le deuxième lancer amène un chiffre impair »;

C : « l'un des lancers amène un chiffre pair, l'autre un chiffre impair ».

Montrer que les événements A, B et C sont deux à deux indépendants. Sont-ils mutuellement indépendants ?

**EXEMPLE N° 4** (D'après oral maths 2)

On considère un dé à 6 faces avec 2 faces portant le numéro 0, 2 faces portant le numéro 1 et 2 autres faces portant le numéro 2. On réalise trois lancers indépendants et on note A, B et C les résultats.

On note alors G la partie du plan  $\mathbb{R}^2$  d'équation cartésienne  $Ax + By + C = 0$

On réalise une deuxième fois les trois tirages. Les résultats sont notés  $A', B'$  et  $C'$  et on note H la partie du plan  $\mathbb{R}^2$  d'équation cartésienne  $A'x + B'y + C' = 0$

1. Calculer la probabilité que G soit une droite.
2. Calculer la probabilité que G soit une droite perpendiculaire à la première bissectrice du plan.
3. Calculer la probabilité que G et H soient toutes les deux des droites.
4. Calculer la probabilité que G et H soient des droites et qu'elles soient parallèles.

**EXEMPLE N° 5** On effectue une suite de jeu de pile ou face.

On définit l'événement  $A_n$  « Obtenir pile au n ième lancer » pour  $n \in \mathbb{N}^*$

1. a. Décrire dans le vocabulaire probabiliste les événements

$$E_1 = \bigcap_{n=10}^{+\infty} A_n, \quad E_2 = \bigcap_{n=1}^{10} \overline{A_n}, \quad E_3 = \bigcap_{n>10} \overline{A_n} \quad \text{et} \quad E_4 = \bigcup_{n \geq 10} A_n$$

- b. Que dire des événements  $E_1$  et  $E_2$  ?

Les événements  $E_2$  et  $E_3$  sont-ils forcément incompatibles ? sont-ils indépendants ?

2. Décrire à l'aide de notations ensemblistes les événements:

$B_1$ : « Il y a au moins un pile sur les 10 premiers lancers »

$B_2$ : « Le premier pile, s'il y en a un, n'est pas obtenu sur les 10 premiers lancers »

$B_3$ : « On obtient un pile au delà strictement du 10 ième lancer et pas avant »

$B_4$ : « On obtient un pile au delà strictement du 10 ième lancer »

3. Démontrer que  $\overline{\bigcup_{n \geq 1} A_n} = \bigcap_{n \geq 1} \overline{A_n}$  et décrire cet événement dans le vocabulaire probabiliste.

4. On pose  $C_n = \bigcup_{k>n} A_k$ . Démontrer que la suite  $(C_n)_{n \geq 1}$  est décroissante c'est à dire que:  $C_{n+1} \subset C_n$

Décrire dans le vocabulaire probabiliste les événements  $C_n$  et l'événement  $C = \bigcap_{n \geq 1} C_n$

5. Décrire à l'aide de notations ensemblistes l'événement

« On obtient que des piles à partir d'un moment dans le jeu »

**EXEMPLE N° 6** *Vais-je sortir un cheval de l'écurie lorsque je joue au jeu des petits chevaux?*

On considère le jeu consistant à lancer un dé équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6.

On considère l'événement  $A_n$  : « on réalise un 6 au n-ème lancer » et on donne  $B_n = \bigcup_{k=1}^n A_k$ .

1. Comment décrire l'événement  $B_n$ ? Calculer sa probabilité.
2. Décrire l'événement  $B = \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n$ . Calculer sa probabilité. En déduire la réponse à la question initiale (en italique) .

**EXEMPLE N° 7** On admet qu'on peut définir une probabilité sur  $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$  en posant  $P(\{n\}) = \frac{\lambda}{2^n}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  où  $\lambda > 0$  est à choisir convenablement

1. Déterminer  $\lambda > 0$  en utilisant les propriétés d'une probabilité.
2. Calculer la probabilité  $P(\{2k+1 \mid k \in \mathbb{N}\})$
3. Si  $B_n = \{2k \mid k \in [0, n]\}$ , calculer  $P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n\right)$

**EXEMPLE N° 8** On lance deux dés équilibrés jusqu'à obtenir un total de 5 ou de 7.

1. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $E_n$  l'événement « on obtient 5 pour la première fois au n ième lancer », calculer  $P(E_n)$ .
2. Quelle est la probabilité que le jeu s'arrête parce qu'on a obtenu un 5?
3. Quelle est la probabilité que le jeu s'arrête parce qu'on a obtenu un 7?
4. Quelle est la probabilité que le jeu ne s'arrête jamais?
5. Si on joue avec un total qui vaut 2 ou 3 à la place de 5 ou 7, est-ce que le jeu s'arrête?

### EXERCICES SUR LE CHAPITRE XII

**EXERCICE N° 0** *Étude d'un test (un classique)*

Une usine fabrique des pièces avec une proportion de 10% de pièces défectueuses. Avant mise sur le marché, on leur fait passer un test qui permet d'accepter 90% des bonnes pièces et de retirer 90% des mauvaises.

1. Quelle est la probabilité qu'une pièce (bonne ou mauvaise) soit acceptée à l'issue du test?
2. Quelle est la probabilité qu'une pièce soit bonne bien qu'elle ne soit pas acceptée au test?
3. Quelle est la probabilité qu'une pièce soit mauvaise bien qu'elle soit acceptée au test?
4. Quelle est la probabilité qu'il y ait une erreur lors du test?

**EXERCICE N° 1** Chaque matin, Baptiste arrive en retard ou pas en cours. S'il est arrivé en retard un jour donné, il sera à l'heure le jour suivant avec une probabilité  $p \in ]0, 1[$ . S'il est à l'heure un jour donné, il sera en retard le jour suivant avec une probabilité  $q \in ]0, 1[$ . On note  $r_n$  (resp.  $h_n$ ) la probabilité que Baptiste soit en retard le jour  $n$  (resp. soit à l'heure le jour  $n$ ).

1. Justifier l'existence d'une matrice  $A$  de  $M_2(\mathbb{R})$  telle que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $\begin{pmatrix} r_{n+1} \\ h_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} r_n \\ h_n \end{pmatrix}$
2. Méthode 1 : Réduire la matrice  $A$ . En déduire  $r_n$  et  $h_n$  en fonction de  $n$
3. Méthode 2 : Vérifier que  $(r_n)$  est une suite arithmético-géométrique. Déterminer  $r_n$  puis  $h_n$ .
4. Étudier la limite de  $r_n$  et  $h_n$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$

**EXERCICE N° 2** On dispose de trois composants électriques numérotés de 1 à 3 donc la probabilité de fonctionnement est  $p_i$  et de fonctionnement totalement indépendant les uns des autres. Donner la probabilité de fonctionnement du circuit lorsque

1. les composants sont disposés en série
2. les composants sont disposés en parallèle
3. le circuit est mixte : le composant n°1 est disposé en série avec le sous-circuit constitué des composants 2 et 3 qui sont montés en parallèle

**EXERCICE N° 3** On considère le jeu suivant : on dispose d'une urne qui contient initialement une boule blanche. On joue alors indéfiniment à pile ou face avec une pièce non équilibrée de sorte que la probabilité d'obtenir face est deux fois plus grosse que celle d'obtenir pile. A chaque fois qu'on obtient face, on ajoute une boule noire dans l'urne. Lorsqu'on obtient pile, on tire au hasard une boule de l'urne.

1. Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $E_n$  l'événement « on obtient pile pour la première fois au  $n$  ième lancer ». Calculer  $P(E_n)$
2. Démontrer qu'il est presque sûr qu'on tire une boule lors de ce jeu.
3. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche lors de ce tirage?

**EXERCICE N° 4** Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire. On effectue dans cette urne des tirages selon la procédure suivante : on note la couleur de la boule tirée, on la remet dans l'urne et on ajoute en plus une boule noire. Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on définit les événements :

- $E_n$  « on obtient la première boule blanche au  $n$ -ième tirage »
- $B_n$  « on obtient une boule blanche au  $n$ -ième tirage »

1. Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , établir que  $P(E_n) = \frac{1}{n(n+1)}$
2. Démontrer qu'on obtient presque sûrement une boule blanche si on effectue une suite infinie de tirages. On pourra remarquer que :  $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

On modifie désormais le jeu : l'urne contient initialement 1 boule blanches et 2 boules noires et on effectue des tirages avec remise (sans rajouter de boule).

On considère l'événement  $E$  « On tire au moins une boule blanche lorsqu'on réalise une infinité de tirage »

L'objectif des questions suivantes est de calculer  $P(E)$  de trois façon différentes.

En plus des événements  $E_n$  et  $B_n$  déjà définie, on introduit :

- $F_n$  « on obtient la première boule blanche au cours des  $n$  premiers tirages »
  - $G_n$  « on obtient  $n$  boules noires au cours des  $n$  premiers tirages »
3. Calculer, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $P(B_n)$ ,  $P(E_n)$ ,  $P(F_n)$  et  $P(G_n)$  dans cette nouvelle configuration de jeu
  4. Exprimer  $E$  à l'aide des événements  $E_n$  (resp.  $F_n$ ) et en déduire  $P(E)$
  5. Exprimer  $\bar{E}$  à l'aide des événements  $G_n$  et en déduire  $P(\bar{E})$  puis  $P(E)$

**EXERCICE N° 5** Dans un casino, il a deux machines à sous A et B qui sont réglées de la façon suivante :

- la probabilité de gagner sur la machine A est de  $\frac{1}{5}$
- la probabilité de gagner sur la machine B est de  $\frac{1}{10}$

Un joueur soupçonne les machines d'avoir des réglages différents mais il ne sait pas laquelle est la plus favorable. Il décide alors d'adopter la stratégie suivante :

- il commence par choisir une machine au hasard
- après chaque partie, il change de machine s'il vient de perdre et il rejoue sur la même machine s'il vient de gagner

On définit, pour  $k \in \mathbb{N}^*$ , les événements suivants :

- $G_k$  « Le joueur gagne la  $k$  ième partie »
- $A_k$  « La  $k$  ième partie se déroule sur la machine A »

1. Écrire une fonction Python jouer d'argument l'entier naturel non nul  $n$  et qui simule le déroulement de  $n$  parties retournant la proportion de parties gagnées parmi ces  $n$  parties.
2. Déterminer la probabilité de gagner la première partie
3. Que dire de la famille d'événements  $\{A_1 \cap A_2, A_1 \cap \bar{A}_2, \bar{A}_1 \cap A_2, \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2\}$ ? En déduire  $P(G_2)$ .
4. Sachant que la deuxième partie a été gagnée, quelle est la probabilité que cette partie l'ait été sur la machine A?
5. On fixe  $k \in \mathbb{N}^*$

- a. Exprimer  $P(G_k)$  à l'aide de  $P(A_k)$ .

- b. Montrer que  $P(A_{k+1}) = -\frac{7}{10}P(A_k) + \frac{9}{10}$

- c. En déduire  $P(A_k)$  puis  $P(G_k)$  en fonction de  $k$

- d. Pour  $n \geq 1$ , on pose  $S_n = \sum_{k=1}^n P(G_k)$ . Calculer  $S_n$  puis la limite de  $\frac{S_n}{n}$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$

Comparer votre résultat à des simulations numériques obtenues à l'aide de la question 1.