

EXEMPLE DU COURS SUR LE CHAPITRE XI

EXEMPLE N° 1 On considère la matrice $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & -2 & a \\ -1 & 2 & b \\ -2 & d & c \end{pmatrix}$ où (a, b, c, d) sont des réels.

Déterminer ces réels pour que A soit une matrice orthogonale.

SUITE EXEMPLE N° 1 Décrire géométriquement l'isométrie f qui est alors canoniquement associée à A

Exercice classique *Expression vectorielle d'une rotation de l'espace*

On considère une rotation r vectorielle d'axe $D = \text{Vect}(u)$ où u est unitaire, d'angle θ .

Démontrer que, pour tout vecteur x , $r(x) = (\cos \theta)x + (\sin \theta)u \wedge x + (1 - \cos \theta)(x \cdot u)u$

EXEMPLE N° 2 On note $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Déterminer la matrice dans la base $\mathcal{B}$ de la réflexion par rapport au plan F d'équation: $x - 2y - z = 0$
2. Déterminer la matrice dans la base $\mathcal{B}$ de la rotation d'axe orienté par $\vec{i} - \vec{j}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$

SUITE EXEMPLE N° 2 Proposer une autre méthode pour répondre à la question 2) de l'exemple précédent

Un contre-exemple au théorème spectral dans $\mathcal{S}_2(\mathbb{C})$

Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice symétrique d'ordre 2 à coefficients complexes soit non diagonalisable. Proposer un exemple concret de matrice symétrique complexe non diagonalisable.

EXEMPLE N° 3 Déterminer une matrice $P \in O_3(\mathbb{R})$ telle que $P^T \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} P$ soit diagonale et réelle.

EXEMPLE N° 4 Le plan est muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé direct.

Identifier et préciser les éléments caractéristiques de la coniques $\mathcal{C}$ donner par :

$$1) 3x^2 + 4xy - 12x + 16 = 0 \quad 2) 3x^2 - 2xy + 3y^2 - 8x + 8y = 0 \quad 3) 4x^2 - 4xy + y^2 + 20x - 10y + 25 = 0$$

EXEMPLE N° 5 Chercher les extrema locaux sur $\mathbb{R}^2$ de l'expression $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$

Rechercher les extrema de f sur $D = [0, 1]^2$ lorsque $f(x, y) = x^2 + (x + y - 1)^2 + y^2$

EXERCICES SUR LE CHAPITRE XI

EXERCICE N° 1 Montrer que l'endomorphisme f associé à la matrice A est une isométrie. Caractériser géométriquement cet endomorphisme.

$$1) A = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} -7 & 24 \\ 24 & 7 \end{pmatrix} \quad 2) A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix} \quad 3) A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

EXERCICE N° 2 Réduire dans une base orthonormée les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

EXERCICE N° 3 Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, on définit $S = \frac{1}{2}(A + A^T)$

1. Justifier que S est une matrice symétrique.

En déduire qu'on peut définir α (resp. β) la plus petit (resp. la plus grande) des valeurs propres de S .

2. Si λ est une valeur propre réelle de A associé au vecteur propre X , justifier que: $X^T S X = \lambda X^T X$.

3. On note P la matrice de passage de $O_n(\mathbb{R})$ diagonalisant S et on pose $Y = P^T X = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

Calculer, en fonction des y_i , les réels $X^T S X$ et $X^T X$.

4. Démontrer enfin que, pour toute valeur propre réelle λ de A : $\alpha \leq \lambda \leq \beta$

EXERCICE N° 4 Soit S une matrice symétrique réelle d'ordre n et $A = S + iI_n \in M_n(\mathbb{C})$. Prouver que A est inversible.

EXERCICE N° 5 Discuter, suivant la valeur du paramètre réel a , la nature de la conique $\mathcal{C}_a$ d'équation

$$\mathcal{C}_a: \quad x^2 + 2axy + y^2 + 2x - 2y = 0$$

EXERCICE N° 6 Rechercher les extrema locaux et globaux de f sur $\mathcal{U}$ lorsque

$$1) f(x, y) = x^3 + y^3 - 6(x^2 - y^2) \text{ et } \mathcal{U} = \mathbb{R}^2 \quad 2) f(x, y) = x(\ln x)^2 + y^2 \text{ et } \mathcal{U} = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$$

EXERCICE N° 7 Soit A, B et C trois points du plan formant un triangle non aplati.

Pour tout point M du plan, on définit $f(M) = MA^2 + MB^2 + MC^2$.

Démontrer qu'il y a un unique point G du plan où $f(M)$ est minimale. Que représente G pour ABC ?