

EXEMPLE DU COURS SUR LE CHAPITRE X**EXEMPLE N° 1**

1. La série géométrique $\sum z^n$ est associée à la suite des coefficients $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où $\forall n \in \mathbb{N}, a_n =$

On sait déjà que cette série converge lorsque $|z| < 1$ et que sa somme est $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$

2. La série $\sum \frac{z^n}{n!}$ est associée à la suite des coefficients $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où $\forall n \in \mathbb{N}, a_n =$

On reconnaît la série de l'exponentielle: elle converge pour tout $z \in \mathbb{C}$ et sa somme est $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$

3. La série $\sum_{n \geq 2} \frac{z^n}{n(n-1)}$ est associée à la suite des coefficients $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où $\forall n \in \mathbb{N}, a_n =$

4. La série $\sum \frac{(-2)^n x^{2n}}{2n+1}$ est associée à la suite réelle $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où $\forall n \in \mathbb{N}, a_n =$

EXEMPLE N° 2 Donner le domaine de définition de la fonction de la variable réelle x où $\left[f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \right]$

SUITE EXEMPLE N° 1 Déterminer le rayon de convergence pour chacune des séries entières de l'exemple 1.

EXEMPLE N° 3 Déterminer le rayon de convergence des séries

$$1) \sum \sin(n)x^n \quad 2) \sum \left(\frac{\pi}{2} - \text{Arctan}(n) \right) x^n \quad 3) \sum \frac{\sin(n)}{n^{2020}} x^n$$

EXEMPLE N° 4

Des exemples à connaître: Calculer les sommes $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^n$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ pour $|x| < 1$

En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ et la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n}$

EXEMPLE N° 5 Soit la fonction f d'une variable réelle x définie par : $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)(2n+1)} x^n$

1. Déterminer le domaine de définition D de f .

2. Démontrer que, pour $x \in]0, 1[$: $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} x^n + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^n$

3. Justifier alors que, pour $x \in]0, 1[$: $f(x) = -\frac{1}{x} \ln(1+x) + \frac{2}{\sqrt{x}} \text{Arctan} \sqrt{x}$

4. Déterminer alors la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)(2n+1)}$

EXEMPLE N° 6 Déterminer les développements en série entière en 0 de f lorsque

$$1. f(x) = \ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right) \quad 2. f(x) = \text{Arctan } x \quad 3. f(x) = \frac{1}{(1-x)^2} \text{ (3 méthodes possibles)}$$

EXEMPLE N° 7 Prouver que la fonction sinus cardinal d'expression $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ pour $x \neq 0$ se prolonge par continuité en une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$

EXEMPLE N° 8

Un contre-exemple: On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ sinon.

1. Démontrer que f est C^∞ sur $\mathbb{R}$ avec $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On pourra vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}, \exists P_n \in \mathbb{R}[X], \forall x \in \mathbb{R}^, f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}} e^{-\frac{1}{x^2}}$*

2. Quelle est la série de Taylor de f ? En déduire que f n'est pas développable en série entière au voisinage de 0.

EXEMPLE N° 9 Déterminer les solutions développables en série entière au voisinage de 0 de (E) : $xy'' + 2y' + xy = 0$

EXEMPLE N° 10 En utilisant que $[x \mapsto e^x]$ est l'unique solution du problème de Cauchy $\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$, retrouver le développement en série entière de la fonction exponentielle.

SUITE EXEMPLE N° 7 Reconnaître la fonction développable en série solution de $xy'' + 2y' + xy = 0$ vérifiant $y(0) = 1$

EXERCICES SUR LE CHAPITRE X

EXERCICE N° 1 Déterminer le rayon de convergence des séries entières

$$1) \sum \frac{(3n)!}{(n!)^3} z^{3n} \quad 2) \sum n^{\ln n} z^n \quad 3) \sum \frac{\text{ch}(5n)}{\text{sh}^2 n} z^{2n+1} \quad 4) \sum \text{Arccos} \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) z^n$$

$$5) \sum a_n x^n \text{ où } a_n = \begin{cases} 2^n & \text{si } n \text{ est pair} \\ 3^n & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \quad 6) \sum a_n z^n \text{ où } a_n \text{ est la } n\text{ième décimale de } \pi$$

EXERCICE N° 2 Déterminer le rayon de convergence et la somme des séries entières

$$1) \sum_{n \geq 0} \text{ch}(n) x^n \quad 2) \sum_{n \geq 0} \frac{(n+1)(n-2)}{n!} z^n \quad 3) \sum_{n \geq 0} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2) \cdot n!} \quad 4) \sum_{n \geq 0} \frac{n^2}{e^n} x^{2n} \quad 5) \sum_{n \geq 0} (2 + (-1)^n)^n x^n$$

EXERCICE N° 3 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note H_n la somme partielle d'ordre n de la série harmonique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ 1. Montrer que $H_n \sim \ln n$ On pourra utiliser une comparaison série-intégrale2. En déduire le rayon de convergence de la série $\sum_{n \geq 1} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right) x^n$ 3. En utilisant un produit de Cauchy, calculer la somme de la série $\sum_{n \geq 1} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right) x^n$

EXERCICE N° 4 Justifier l'existence et déterminer le développement en série entière en 0 de:

$$1) f(x) = \frac{2x}{1-2x^2+x^4} \quad 2) f(x) = \frac{1}{(1-x)(2+x)} \quad 3) f(x) = \frac{1}{1+x+x^2}$$

$$4) f(x) = \ln(x^2-5x+6) \quad 5) f(x) = \text{Arctan} \left(\frac{1-x^2}{1+x^2} \right) \quad 6) f(x) = e^x \sin x$$

EXERCICE N° 5 Justifier que $\left[f : x \mapsto \int_0^x \frac{1-\cos t}{t^2} dt \right]$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$ et préciser les dérivées successives en 0.EXERCICE N° 6 On considère la fonction f de la variable réelle x d'expression $f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} x^n$ 1. Déterminer le domaine de définition de f 2. Pour $x \in]-1, 1[$, exprimer $f'(x)$ puis $f(x)$ à l'aide de fonctions usuelles.3. En déduire la valeur de $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)}$ EXERCICE N° 7 Montrer que l'équation $t^2 y'' + 4t y' + 2y = e^t$ admet une unique solution développable en série entière au voisinage de 0 qu'on déterminera.EXERCICE N° 8 En utilisant une équation différentielle au 2nd ordre vérifiée par f , déterminer le développement en série entière en 0 de $f = [x \mapsto \text{sh}(\text{Arcsin } x)]$ EXERCICE N° 9 On considère la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ où : $\begin{cases} a_0 = a_1 = 1 \\ \forall n \geq 0, a_{n+2} = a_{n+1} + \frac{a_n}{n+2} \end{cases}$ 1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $1 \leq a_n \leq n+2$ et en déduire le rayon de convergence R 2. On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+2} x^{n+2}$ a. Justifier que g est aussi définie sur $] -R, R[$ b. Établir une relation liant $f(x)$ et $g(x)$ sur $] -R, R[$ c. Montrer que g est solution sur $] -R, R[$ d'un problème de Cauchy du premier ordre qu'on déterminera.d. Résoudre ce problème de Cauchy et en déduire les expressions de $g(x)$ puis $f(x)$