

EXEMPLE DU COURS SUR LE CHAPITRE I**EXEMPLE N° 1** Démontrer que:

1. le carré $C = [-2, 0] \times [0, 2]$ est une partie bornée qui n'est pas ouverte
2. le demi-plan $P_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ est une partie ouverte qui n'est pas bornée.
3. $\mathbb{R}^2$ est une partie ouverte et fermée (ce qui est plus étonnant !)

SUITE EXEMPLE N° 1 Pour C et P_+ , préciser les points à l'intérieur, les points adhérents et les points à l'extérieur.
Un "bon" schéma suffira pour justifier les réponses

EXEMPLE N° 3/2 On considère la fonction f d'expression $f(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{t} \ln(1 + e^t) \\ \sqrt{1 - t^2} \end{pmatrix}$

Donner le domaine de continuité D_c de f et le domaine de dérivabilité D de f obtenus par les théorèmes usuels. Calculer $f'(t)$ pour $t \in D$. f est-elle C^∞ sur D ? f est-elle dérivable aux points de D_c qui ne sont pas dans D ?

EXEMPLE N° 2 Si $\vec{f} : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $\vec{g} : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ sont de classe C^1 prouver que

1. si $\vec{f}$ ne s'annule pas sur I alors $u = \|\vec{f}\|$ est de classe C^1 sur I et calculer u' à l'aide de f et f'
2. $v = \det(\vec{f}, \vec{g})$ est de classe C^1 sur I et calculer v' à l'aide de f, f', g et g'

EXEMPLE N° 3 Déterminer un $DL_3(0)$ de $\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} \ln(1 - t) \\ \frac{1}{(1 + t)^2} \end{pmatrix}$ et identifier $\vec{f}^{(k)}(0)$ pour $k \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$

EXEMPLE N° 7/2 Déterminer un $DL_3(1)$ de $f(t) = \begin{pmatrix} te^t \\ \frac{\ln t}{t} \end{pmatrix}$ et identifier $f^{(k)}(1)$ pour $k \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$

EXEMPLE N° 4

1. Proposer une représentation paramétrique de la courbe et expliciter la fonction vectorielle associée pour
 - a. $\mathcal{C}$ est le cercle de centre $I(1, 0)$ et de rayon 2
 - b. $\mathcal{P}$ est la parabole d'équation $x = y^2$
 - c. $\mathcal{C}_g$ est la courbe représentative de la fonction g définie sur I
2. Identifier la courbe $\begin{cases} x = 1 + 2 \cos(4t) \\ y = 2 \sin(4t) \end{cases}, t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

SUITE EXEMPLE N° 3 On considère la courbe paramétrée $\Gamma : \begin{cases} x(t) = \ln(1 - t) \\ y(t) = \frac{1}{(1 + t)^2} \end{cases}, t \in]-1, 1[$

Justifier que le point de paramètre $t = 0$ est régulier et préciser une équation cartésienne de la tangente en ce point.

EXEMPLE N° 5 On considère la courbe paramétrée $\Gamma : \begin{cases} x(t) = \ln(1+t^4) \\ y(t) = \operatorname{ch}(t^2) \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

Justifier que le point de paramètre $t = 0$ est stationnaire et déterminer une équation cartésienne de la tangente en ce point.

EXEMPLE N° 5.5 Montrer que la courbe $\Gamma : \begin{cases} x(t) = t \ln t \\ y(t) = t \end{cases}, t > 0$ admet un point limite lorsque $t \rightarrow 0^+$. On notera $M(0)$ ce point et on précisera les coordonnées et la tangente à Γ en ce point.

EXEMPLE N° 6 On revient sur l'exemple de la Cardioïde $\mathcal{C} : \begin{cases} x(t) = \frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2} \\ y(t) = \frac{4t}{(1+t^2)^2} \end{cases}$

1. Montrer que le point $M(t)$ de paramètre t tend lorsque t tend vers $+\infty$ vers un point limite M_∞ dont on précisera les coordonnées.
2. En considérant ce point M_∞ comme appartenant à la courbe, préciser une équation cartésienne la demi-tangente en ce point.

EXEMPLE N° 7 Préciser l'allure du point de paramètre $t = 0$ pour la courbe $\Gamma : \begin{cases} x(t) = \cos(t^2) \\ y(t) = \frac{t^4}{1+t^2} \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

EXEMPLE N° 8 Étudier les branches infinies de $\Gamma : \begin{cases} x(t) = \frac{t^2}{(t+1)(t-2)} \\ y(t) = \frac{t^2(t+2)}{t+1} \end{cases}$

EXEMPLE N° 9

1. On considère l'**astroïde** donnée par la représentation $\Gamma : \begin{cases} x(t) = \cos^3(t) \\ y(t) = \sin^3(t) \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

On note $M(t)$ le point de paramètre t de l'astroïde.

- a. Comparer les points $M(t+2\pi)$ et $M(t)$. On suppose qu'on a construit le support de la courbe Γ lorsque $t \in [a, a+2\pi]$ où $a \in \mathbb{R}$ est fixé. Comment construire le support de Γ sur $\mathbb{R}$?
- b. Trouver une symétrie entre les points $M(-t)$ et $M(t)$. On suppose qu'on a construit le support de Γ sur $[0, +\infty[$. Comment construire le support de Γ sur $\mathbb{R}$?
- c. Trouver une symétrie entre les points $M(\pi-t)$ et $M(t)$. Si on connaît Γ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, quelle portion de Γ peut-on construire?
- d. Trouver une symétrie entre les points $M(\frac{\pi}{2}-t)$ et $M(t)$. Sur quel domaine D suffit-il de connaître Γ pour obtenir un tracé sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

2. Expliciter un domaine d'étude pour la **cycloïde** donnée par la représentation

$$\begin{cases} x(t) = R(t - \sin t) \\ y(t) = R(1 - \cos t) \end{cases}, t \in \mathbb{R} \text{ (} R > 0 \text{ est fixé)}$$

3. Étudier complètement l'astroïde et la cycloïde.

EXEMPLE N° 10

Montrer que $\Gamma : \begin{cases} x(t) = t + 1 + \frac{1}{t-1} \\ y(t) = t^2 + 1 + \frac{1}{t} \end{cases}$ possède un unique point double dont on précisera les coordonnées