

EXEMPLE DU COURS SUR LE CHAPITRE 0

EXEMPLE N° 1 Dans chaque cas, prouver que F est un espace vectoriel dont on précisera la dimension.

- a) $F = \{(s, t + s, 2t - s) \mid (t, s) \in \mathbb{R}^2\}$ b) $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{K}^4 \mid 2x - y + 2z - t = x + y + z = 0\}$
 c) $F = \{((\alpha + \gamma)X^2 + (\alpha + \beta)X + \beta - \gamma) \mid (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3\}$ d) $F = \left\{ \begin{pmatrix} P(0) & P'(0) \\ P(1) & P'(1) \end{pmatrix} \mid P \in \mathbb{R}_2[X] \right\}$
 e) F contient les polynômes réels de degrés au plus 3 vérifiant $P(1) = P(-1)$ et $P(0) = P^{(2)}(0) = 0$
 f) F est l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' + 4y = 0$
 g) F est l'ensemble des suites réelles vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$

EXEMPLE N° 2 Dans $\mathbb{R}[X]$, on définit $e_1 = (1 - X)^3$, $e_2 = (1 - X)^2$, $e_3 = 1 - X$ et $e_4 = 1$

1. Prouver que $\mathcal{B}' = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ est une famille libre de $\mathbb{R}[X]$. Quel espace connu E engendre-t-elle ?
2. On note $\mathcal{B}$ la base canonique de E . Donner les matrices de passage entre les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.
3. En déduire une primitive de $\left[f : x \mapsto (x^3 + x^2)\sqrt{1 - x} \right]$ sur $] -\infty, 1[$

EXEMPLE N° 3 Soient $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ a + b & b + c & 0 \end{pmatrix} \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$

et G l'ensemble des matrices de $M_{2,3}(\mathbb{R})$ dont la somme des coefficients de chacune des lignes est nulle.

1. Prouver que F et G sont des sev de $E = M_{2,3}(\mathbb{R})$
2. Déterminer une base de F et une base de G
3. Déterminer $\dim(F \cap G)$ et $\dim(F + G)$.
4. En déduire que $F + G = E$. F et G sont-ils supplémentaires dans E ?
5. Donner deux supplémentaires de $F \cap G$ dans F .

EXEMPLE N° 4 Soit E un $\mathbb{K}$ ev de dimension finie et f est un endomorphisme de E vérifiant $f^3 = id_E$

1. Prouver que $\text{Im}(f - id_E) \subset \text{Ker}(f^2 + f + id_E)$
2. Montrer que le noyau et l'image de $f - id_E$ sont supplémentaires dans E

EXEMPLE N° 5 Donner le noyau et l'image des matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et des produits de ces matrices.

EXEMPLE N° 6 On considère les applications f et g données par:

1. $f \in \mathcal{L}(M_2(\mathbb{R}), \mathbb{R}_2[X])$ canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

- a. Préciser $f(I_2)$ où I_2 est la matrice identité.
- b. Préciser le noyau et l'image de f .

2. g est définie sur $\mathbb{C}$ par $g(a + ib) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

- a. montrer que $g \in \mathcal{L}(E, F)$ où on précisera les espaces vectoriels E et F et donner sa matrice dans les bases canoniques
- b. g est-elle injective ? surjective ?

SUITE EXEMPLE N° 6 On reprend l'application linéaire f de l'exercice précédent.

1. Proposer une base $\mathcal{B}'$ de $M_2(\mathbb{R})$ et une base $\mathcal{C}'$ de $\mathbb{R}_2[X]$ pour lesquelles la matrice de f relative à ces bases sera

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Expliciter alors les matrices inversibles P et Q permettant de lier A et A' par une relation matricielle de changement de bases.
3. Vérifier cette relation par le calcul matriciel.

EXEMPLE N° 7 Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé $A = \begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

1. Préciser $\text{Im}(f)$, $\text{Ker}(f)$ et $\text{Ker}(f + id)$

2. Proposer une matrice P de $GL_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

EXEMPLE N° 8 Dans $\mathbb{R}^4$ où on note (x, y, z, t) les coordonnées dans la base canonique.

1. Identifier géométriquement l'endomorphisme q canoniquement associé à la matrice $Q = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$

On considère le sous-espace vectoriel F donné par les équations $\begin{cases} x - y = 0 \\ x + t = 0 \end{cases}$ et $G = \text{Vect}((1, -1, 0, 0), (0, 0, 1, 1))$

2. Prouver que F et G sont supplémentaires.

Préciser la matrice du projecteur p sur F parallèlement à G dans la base canonique.

3. Donner la matrice S dans la base canonique de la symétrie par rapport à F parallèlement à G .

4. Justifier qu'il existe une matrice inversible P qu'on précisera telle que $P^{-1}SP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = D$